

Math.p.

397

σ

North. P. 397 = 4th Emurdo

STUDIEN

IM

GEBIETE NUMERISCHER GLEICHUNGEN

MIT ZUGRUNDELEGUNG DER

ANALYTISCH-GEOMETRISCHEN ANSCHAUUNG IM RAUME

NEBST EINEM ANHANGE

ÜBER ERWEITERTE FUNDAMENTAL - CONSTRUCTIONSMITTEL DER GEOMETRIE,

VON

LORENZ ŽMURKO,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER K. K. TECHNISCHEN AKADEMIE IN LEMBERG, CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER GELEHRTEN-GESELLSCHAFT IN KRAKAU
UND THÄTIGEM MITGLIEDE DER K. K. GALIZISCHEN LANDWIRTSCHAFTS-GESELLSCHAFT.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 18. FEBRUAR 1869.

WIEN.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1870.

BESONDERS ABGEDRUCKT AUS DEM XXX. BANDE DER DENKSCHRIFTEN DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN
CLASSE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.



STUDIEN IM GEBIETE NUMERISCHER GLEICHUNGEN

MIT ZUGRUNDELEGUNG DER

ANALYTISCH-GEOMETRISCHEN ANSCHAUUNG IM RAUME

NEBST EINEM ANHANGE

ÜBER ERWEITERTE FUNDAMENTAL-CONSTRUCTIONSMITTEL DER GEOMETRIE,

VON

LORENZ ŻMURKO,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER K. K. TECHNISCHEN AKADEMIE IN LEMBERG, CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER GELEHRTEN-GESELLSCHAFT IN KRAKAU
UND THÄTIGEM MITGLIEDE DER K. K. GALIZISCHEN LANDWIRTHSCHAFTS-GESELLSCHAFT.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 18. FERRUAR 1869.

Vorerinnerung.

Newton stellt mit Hilfe der von ihm gegründeten Näherungsmethode die in Rechnung stehende Wurzel einer numerischen Gleichung $f(x)=0$ in folgender decadisch fallend geordneten Reihe dar:

$$x = x_0 - \frac{x_0}{Q_0} - \frac{x_1}{Q_0} - \frac{x_2}{Q_0} - \frac{x_3}{Q_0} - \dots,$$

in welcher x_0 als Initialwerth Eine oder einige Anfangsstellen der Wurzel repräsentirt, und die mit Q ange- deuteten Folgeglieder vor Allem den Relationen

$$x_r = x_{r-1} - \frac{x_{r-1}}{Q_0};$$
$$\frac{x}{Q_0} = f(x) : \frac{df(x)}{dx} = f(x) : f_1(x)$$

zu genügen, und in der Weise zur Verwendung zu kommen haben, dass man von einem jeden einzelnen Q bloß je Eine oder nur einige wenige Anfangsstellen benützt — nach Massgabe des Umstandes, wie viele von denselben als die richtigen decadischen Folgeglieder der Wurzel selbst erkannt werden. Im Verlaufe dieser Abhandlung werden wir diese mit Q bezeichneten Folgeglieder mit der Benennung Orientirungsquo- tienten kennzeichnen.

a) In dem Falle, wo von x_0 aus, für numerisch zunehmende x -Werthe, der Ausdruck $f_1(x)$ eine nume- rische Abnahme bezeugt, leistet die Newton'sche Methode bei der Berechnung der Wurzeln entschie- dene Dienste. Die entgegengesetzt genommenen Orientirungsquotienten bilden eine dekadisch abnehmende

Reihe von Aggregaten, welche mit x_0 gleichbezeichnet erscheinen, und zu x_0 hinzugezählt, die in Rechnung stehende Wurzel desto besser darstellen, in je grösserer Anzahl dieselben zur Verwendung gelangen. In numerischer Beziehung bilden die Näherungswerthe $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r, x_{r+1}$ eine steigende Reihe, und nähern sich der Wurzel desto mehr, je grösser ihr Zeiger ist.

b) In dem Falle aber, wo von x_0 aus, für numerisch wachsende x -Werthe, die derivirte $f_1(x)$ eine numerische Zunahme bezeugt, bieten die Newton'schen Orientirungsquotienten bei der Bestimmung der numerisch steigenden Näherungswerthe $x_1, x_2, x_3, \dots$ in dem Masse numerisch zu grosse Aggregate, je rascher die Zunahme von $f_1(x)$ vor sich geht. Bei einer erheblich raschen Zunahme von $f_1(x)$ geht die Bestimmung der Wurzelaggregate in ein förmliches Tappen über, und man könnte leicht geneigt sein, der Newton'schen Methode ihren gehörigen Werth abzusprechen. Gibt man jedoch das Bestreben auf, den Näherungswerthen $x_1, x_2, x_3, \dots$ die Eigenschaft aufzuzwingen, dass selbe durch numerische Zunahme an den wahren Wurzelwerth immer näher und näher rücken; — wenn man vielmehr zufolge der diesfälligen dem Orientirungsquotus inhaftenden Beschaffenheit das Aggregat $Q_0^{x_0}$ zu gross annimmt, so erhält man in numerischer Beziehung $x_1 > x$, und wird in weiterer Folge genöthigt sein, die Rechnung in der Art fortzusetzen, dass die Näherungswerthe $x_1, x_2, x_3, \dots$ durch fortgesetzte numerische Abnahme an den wahren Wurzelwerth immer näher und näher treten. Bei der Fortsetzung der diesfälligen Operation wird der Ausdruck $f_1(x)$ eine Abnahme bezeugen, und die weiteren Orientirungsquotienten gelangen demgemäss bei der Bestimmung der nun entgegengesetzten Aggregate zur entschiedenen Geltung.

c) In den Fällen, wo mehrere Anfangsstellen nicht einer einzelnen, sondern mehreren, etwa r Wurzeln, der Gleichung $f(x) = 0$ gemeinschaftlich angehören, bildet der Orientirungsquotus Q_0^x durchaus keinen Anhaltspunkt, und erscheint zur Bestimmung der decadischen Wurzelaggregate völlig unfähig. Dies sind Erscheinungen, welche die Newton'sche Methode in völligen Misscredit brachten, ja für eine völlige Verwerflichkeit derselben sprachen.

Wenn man aber bedenkt, dass in diesen Fällen in Bezug auf die gemeinschaftlichen Anfangsstellen die betreffenden r Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ als einander gleich angesehen werden können; wenn man weiter erwägt, dass eben diese Erscheinung in Bezug auf die derivirten Gleichungen:

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_{r-2}(x) = 0, f_{r-1}(x) = 0$$

sich derart manifestirt, dass die gemeinschaftlichen Anfangsstellen in der ersten bei $(r-1)$ Wurzeln, in der zweiten bei $(r-2)$, in der dritten bei $(r-3)$. . . in der vorletzten bei zwei, und in der letzten bei einer einzigen Wurzel sich kundgeben; wenn man ferner auch des Umstandes gedenkt, dass diese Erscheinung in Beziehung auf die Werthe der Polynome $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \dots f_{r-2}(x), f_{r-1}(x)$ eine gesetzmässige Depression in den Anfangsstellen in der Weise bewirkt, dass diese Werthe um desto rascher gegen die Nulle zu convergiren, einem je kleineren Derivationszeiger sie angehören, — so wird man bald gewahr, dass zur Ermittlung der erwähnten mehren Wurzeln gemeinschaftlich angehörigen Aggregate, die Newton'sche Methode erst bei der Gleichung $f_{r-1}(x) = 0$ in ihre vollen Rechte tritt, weil die erwähnten Anfangsstellen in dieser Gleichung nur einer einzigen Wurzel angehören.

In diesem Falle wird man nicht den Ausdruck $Q_0^{x_0}$, sondern vielmehr den Ausdruck:

$$Q_{r-1}^{x_0} = f_{r-1}(x) : f_r(x)$$

als den Newton'schen Orientirungsquotus ausersehen, und denselben zur Ermittlung der successiven Wurzelaggregate so lange verwenden, in so lange die oberwähnte gesetzmässige Depression der Anfangsstellen in Bezug auf die Functionswerthe $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_{r-1}(x)$ sich bethätigt. Von der Stelle angefangen, welche die erwähnte gesetzmässige Depression nicht bewirkt, erhalten die r Wurzeln einzeln oder gruppen-

weise verschiedenartige Folgeglieder, werden somit mittelst passender Orientierungsquotienten $Q_{r,s}^x$ von einander getrennt und der weiteren Rechnung unterworfen.

In allen sub a) b) c) angeführten Fällen bietet die Newton'sche Methode genügende Auskunft, um sich der in Rechnung stehenden Wurzel mit jeder erwünschten Genauigkeit zu nähern und ist nur in der einzigen Beziehung als mangelhaft anzusehen, dass man mittelst derselben nicht erfährt, wie viele von den Anfangsstellen des in Verwendung stehenden Orientierungsquotus als ein wirkliches Wurzelaggregat zu gelten haben.

Erst der Mathematiker Fourier hat der Newton'schen Methode eine solche Vervollkommenung verliehen, dass man mit Hilfe seiner Methode bei jedem einzelnen Orientierungsquotus ganz genau erfährt, bis zu welcher dekadischen Stelle die Darstellung der Wurzel bereits gediehen ist. Das einschlägige, von Fourier begründete Verfahren besteht im Folgenden:

Sei etwa x_r ein derartiger Näherungswerth, welcher in allen seinen Stellen mit den Anfangsstellen der Wurzel übereinstimmt, und $\dot{x}_r$ eine Zahl, welche aus x_r durch Vermehrung der dekadischen Schlussstelle um eine Einheit hervorgeht, dergestalt, dass man beispielsweise für $x_r = 32.576$, $\dot{x}_r = 32.577$ findet, so wird ganz gewiss der wahre Werth der Wurzel zwischen x_r und $\dot{x}_r$ zu liegen kommen.

Bezeichnet man ganz allgemein von den Grössen $f_s(x)$, $f_s(\dot{x})$, die numerisch grössere mit $f_s(x)$, und die numerisch kleinere $f_s(\dot{x})$, so erhält man:

$$x_{r+1} = \left\{ x_r - [f(x_r) : f_1(x_r)] \right\}_{2n+k} \quad \dot{x}_{r+1} = x_{r+1} + \frac{1}{10^{2n+k}},$$

sobald man: $\dot{x}_r - x_r = 10^{-n}$ voraussetzt, und den Werth von k aus:

$$f_2(x_r) : 2f_1(x_r) = \frac{m}{10^{k+1}} + \frac{m'}{10^{k+2}} + \dots \text{bestimmt.}$$

Der in dem Ausdrücke für x_{r+1} beigefügte Zeiger $2n+k$ deutet an, dass man den betreffenden Quotus bloß so weit zu entwickeln habe, bis man die dem dekadischen Zeiger ($-2n-k$) entsprechende Ziffer erhält.

Hieraus ist der Vorgang ersichtlich, wie man von x_0 aus nach und nach zu den Gliedern der Reihe $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r, x_{r+1} \dots$ gelangt, und demgemäss jede erwünschte Näherung an den wahren Wurzelwerth bewirken kann.

Diese in ihrer Entwicklung sehr elegante und in der Anwendung äusserst einfache Methode hatte Fourier aus der Betrachtung der Descartes'schen Curve abgeleitet und zunächst zur Berechnung der primären (reellen) Wurzeln einer Zahlengleichung mit nur einer Unbekannten bestimmt. Die betreffende Entwicklung findet man in dem nach seinem Tode gedruckten Werke: „Analyse des Equations déterminées par M. Fourier première partie“ niedergelegt.

Wenn man aber schon den Titel dieses Werkes, das darin niedergelegte „Exposé synoptique“ und nebst dem zahlreiche, im zweiten Capitel niedergelegte Aussagen aufmerksam prüft, so erwehrt man sich nicht der schliesslichen Überzeugung, dass mit dem Tode dieses grossen Denkers eigentlich die vollständige Erledigung der meisten, ja vielleicht aller in das Gebiet der Gleichungen einschlägigen theoretischen und praktischen Fragen der Nachwelt auf eine längere Zeit vorenthalten ist, dass es des mühevollen Strebens und vielseitigen Schaffens noch bedürfen wird, um in kleinen Portionen Stufe für Stufe wenigstens einzelne Hauptpunkte dieser Wissenschaft zu erklimmen, welche diesem erhabenen Genius schon bei der Anlage seines Werkes ganz gewiss als eine vollständige Schöpfung zu Tage lag.

Seite 231, Artikel 37 liest man:

„Cette remarque n'est point bornée aux fonctions qui ne contiennent qu'une seule variable. On peut en général résoudre la question suivante qui se présente dans les applications principales de l'analyse algébrique. Une fonction algébrique $f(x, y, z, \dots)$ de plusieurs variables étant proposée...etc.“ Hieraus und aus den betreffenden Stellen p. 227 und andern mehreren ist deutlich zu ersehen, dass es dem Verfasser schon während der Abhandlung der Gleichung mit nur Einer Unbekannten bei jeder sich darbietenden Gelegenheit

daran liegt. die Gesichtspunkte und Auffassungen in der Weise zu stellen und vorzubereiten, um selbe seiner Zeit als Überbrückung zu einer Methode dienstbar zu machen, welche auf Systeme von Gleichungen mit mehreren unbekannten anwendbar sein sollte.

Von dieser Überzeugung durchdrungen, habe ich den Entschluss gefasst, meine Studien auf dem Gebiete der Zahlengleichungen vornehmlich jener Partie zuzuwenden, welche die methodische Berechnung der Gleichungswurzeln betrifft. Die Methode von Fourier zur Berechnung der primären Wurzeln von Gleichungen mit nur Einer Unbekannten zum Muster nehmend, war es mein Bestreben, dieselbe auf die Berechnung complexer Wurzeln einer solchen Gleichung auszudehnen und schliesslich eine Methode aufzustellen, welche zur Berechnung der Wurzeln eines Systems von coëxistenten Gleichungen mit mehreren Unbekannten sich eignen soll. Ursprünglich habe ich es für zweckmässig erachtet, diese verallgemeinerte Näherungsmethode unmittelbar an die Gleichungstheorie von Fourier anzureihen; bald wurde ich jedoch gewahr, dass die derselben zu Grunde liegenden räumlichen Anschauungsweisen in einem zu geringen Maassstabe entwickelt sind, als dies nöthig war, um hieraus die erforderlichen Subsidiën zur Begründung der allgemeinen Näherungsmethode schöpfen zu können. Ich habe mich desshalb entschlossen, nach einem solchen Ausgangspunkte mich umzusehen, von welchem aus die hauptsächlichsten, bereits bekannt gewordenen Gleichungstheorien als ein organisches Ganze hervorgehen, um theils sich gegenseitig unterstützend, theils einander ergänzend sich zu einem harmonischen Systeme zu vereinigen. Diesen Ausgangspunkt fand ich einestheils in der Verallgemeinerung des Cauchy'schen Existenzbeweises für wenigstens Eine Wurzel einer Gleichung mit einer Unbekannten, und in weiterer Folge in der zweckmässigen und gründlichen Ausbildung der von S. Spitzer publicirten räumlichen Darstellungsmethode der Gleichungswurzeln. Von da aus war es mir leicht, die von Cauchy angeregten Kriterien einer horizontalen Einschliessung der complexen Wurzelpunkte zu begründen und mit Zuhilfenahme der Sturm'schen Restmethode zu einem prägnanten Trennungsmittel der Wurzelpunkte auszubilden.

Die Fourier'sche Gleichungstheorie selbst gewann auf Grund der räumlichen Anschauung, namentlich in Bezug auf die Deutung und Auszählung der complexen Wurzeln eine wesentliche Belebung, und es gelang mir, diese ganze Theorie in einer überraschend kurzen Abhandlung zu verkörpern. Siehe §. 6.

Im Anhange brachte ich die successive Ausmittlung der Gleichungscoëfficienten in zweierlei Weise zur Darstellung, nach Massgabe des Umstandes, ob bei der Ausmittlung der Wurzel blos Ein Rechner oder mehrere gleichzeitig thätig sein können. Auch findet man daselbst die Anweisung zur constructiven Ausmittlung der successiven Coëfficientreihen, wie auch eine constructive Näherungsmethode zur Ausmittlung der primären Gleichungswurzeln. Eine zweite constructive Methode zur Bestimmung der primären Gleichungswurzeln auf Grundlage der Bildung der sogenannten Integralcurven.

Ferner sind in diesem Paragraphe Constructionsmittel angegeben, mittelst welchen man in directer Weise die Lösung aller geometrischen Probleme bewerkstelligen kann, welche von der Auflösung einer, höchstens dem 4. Grade angehörigen Gleichung abhängen, und eben hiedurch ersichtlich gemacht, dass gleichwie die Mathematik nur Gleichungen bis höchstens zum 4. Grade in geschlossenen Ausdrücken zu lösen vermag, auch die geometrische Construction bis dahin fähig sei, Auflösungen zu vermitteln.

Schliesslich geschieht der Erzeugung der Cycloiden eine Erwähnung und wird gezeigt, wie man sich derselben zur Rectification gegebener Kreisbögen, zur Polysection eines gegebenen Winkels und überhaupt zur Auflösung einiger transcendenten Gleichungen bedienen kann.

Lemberg am 10. August 1868.

§. 1.

Fundamenteigenschaften der Gleichungspolynome.

Sei $F(u) = f(u) + i\varphi(u) = 0$, wobei $i = \sqrt{-1}$ (1)

eine algebraische Gleichung, in welcher sowohl $f(u)$, als auch $\varphi(u)$ durch Polynome von der Form: $A_0 + A_1u + A_2u^2 + \dots$ in endlicher Gliederzahl dargestellt sind.

Auf Grund der Taylor'schen Reihe findet man:

$$F(u + \rho e^{\mu i}) = F(u) + \frac{F_1(u)}{1!} \rho e^{\mu i} + \frac{F_2(u)}{2!} \rho^2 e^{2\mu i} + \dots, \quad (2)$$

worin ganz allgemein:

$$F_s(u) = \frac{d^s F(u)}{du^s} = \left(\frac{d}{du}\right)^s F(u); \quad r! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (r-1)r, \quad (3)$$

und

$$\rho e^{n\mu i} = \rho \cos n\mu + i\rho \sin n\mu, \quad \rho e^{\mu i} = \rho \cos \mu + i\rho \sin \mu = \Delta x + i\Delta y \quad (4)$$

verstanden werden soll.

Setzt man eben so:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^s f(x) = f_s(x), \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^s \varphi(x) = \varphi_s(x), \quad y \frac{d}{dx} = D, \quad (5)$$

so erhält man auf Grund des Taylor'schen Satzes in symbolischer Form:

$$\begin{aligned} f_s(x + iy) &= f_s(x) e^{Di} = f_s(x) \cos D + i f_s(x) \sin D \\ \varphi_s(x + iy) &= \varphi_s(x) e^{Di} = \varphi_s(x) \cos D + i \varphi_s(x) \sin D, \text{ hiemit} \\ F_s(x + iy) &= s!(Z_s + iz_s) = s! \sigma_s e^{\alpha_s i} \end{aligned} \quad (6)$$

mit den Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} s! Z_s &= s! \sigma_s \cos \alpha_s = f_s(x) \cos D - \varphi_s(x) \sin D, \\ s! z_s &= s! \sigma_s \sin \alpha_s = f_s(x) \sin D + \varphi_s(x) \cos D, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\cos D = 1 - \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \frac{y^2}{2!} + \left(\frac{d}{dx}\right)^4 \frac{y^4}{4!} - \dots, \quad \sin D = \frac{d}{dx} y - \left(\frac{d}{dx}\right)^3 \frac{y^3}{3!} + \dots$$

Die in (6) und (7) spielenden, symbolisch angedeuteten Differentiationen in den Ausdrücken $f_s(x) \cos D$, $f_s(x) \sin D$, ... führen uns auf endliche Polynome, deren Glieder der Form:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f_s(x) \frac{y^n}{n!} = f_{s+n}(x) \frac{y^n}{n!}, \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n \varphi_s(x) \frac{y^n}{n!} = \varphi_{s+n}(x) \frac{y^n}{n!} \quad (8)$$

angehören, und in diesen Gleichungen ihre hinlängliche Deutung besitzen. Ist etwa in Bezug auf x die Function $f(x)$ dem m -ten Grade angehörig, so erhält der Ausdruck $\left(\frac{d}{dx}\right)^n f_s(x)$ jedesmal den Nullwerth, sobald die Ungleichung $n + s > m$ zutrifft. Hiedurch ist die Behauptung gerechtfertigt, dass die in (7) spielenden Polynome wie $f_s(x) \cos D$, $\varphi_s(x) \sin D$ je eine endliche Gliederanzahl besitzen.

Wenn man in (2) an die Stelle von u die complexe Grösse $x + iy$ setzt, und dann die Ausdrücke $F_s(x + iy)$ nach (6) und (7) deutet, so erhält man:

$$\begin{aligned} F(x + iy + \rho e^{\mu i}) &= F((x + \Delta x) + i(y + \Delta y)) = \\ &= \sigma_0 e^{2\alpha_0 i} + \rho \sigma_1 e^{i(\alpha_1 + \mu)} + \rho^2 \sigma_2 e^{i(\alpha_2 + 2\mu)} + \dots = \dot{Z}_0 + i\dot{z}_0 = \dot{\sigma}_0 e^{2\alpha_0 i} \end{aligned} \quad (9)$$

wobei:

$$(10) \quad \dot{Z}_0 = \dot{\sigma} \cos \alpha_0 = \sigma_0 \cos \alpha_0 + \sigma_1 \cos(\alpha_1 + \mu) \rho + \sigma_2 \cos(\alpha_2 + 2\mu) \rho^2 + \dots,$$

$$(11) \quad \dot{z}_0 = \dot{\sigma} \sin \alpha_0 = \sigma_0 \sin \alpha_0 + \sigma_1 \sin(\alpha_1 + \mu) \rho + \sigma_2 \sin(\alpha_2 + 2\mu) \rho^2 + \dots$$

Aus (7) hat man ganz allgemein:

$$(12) \quad Z_r^2 + z_r^2 = \sigma_r^2$$

woraus ersichtlich, dass für $\sigma_r = 0$, nothwendig auch $Z_r = z_r = 0$ sein muss.

Sind die angenommenen Werthe von x und y von der Beschaffenheit, dass man in Folge derselben

$$(13) \quad \sigma_0 = 0, \text{ hiemit auch } Z_0 = z_0 = 0, \text{ und somit auch}$$

$$F(x + iy) = Z_0 + z_0 i = \sigma_0 e^{i\alpha_0} = 0$$

erhält, so sagt man in diesem Falle, dass der complexe Ausdruck $u = x + iy$ eine Wurzel der Gleichung

$$(14) \quad F(u) = 0$$

ausmache. Ist jedoch σ_0 in Folge der Werthe von x und y nicht Null, so lässt sich nachweisen, dass ein passend gewählter Zusatz $\rho e^{\mu i} = \Delta x + i \Delta y$ bewirken kann, dass in der Gleichung

$$(15) \quad F(x + iy + \rho e^{\mu i}) = F((x + \Delta x) + i(y + \Delta y)) = \dot{\sigma}_0 e^{i\alpha_0}$$

die als positiv gedachte Grösse $\dot{\sigma}_0$ sich kleiner gestalten lässt, als die ebenfalls als positiv gedachte Grösse σ_0 .

Vor Allem ist es klar, dass von den Grössen

$$(16) \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots$$

bei den letzterwähnten Werthen von x und y nicht alle gleichzeitig verschwinden dürfen, weil dies bedeuten würde, dass im Widerspruche mit der in (1) gemachten Voraussetzung der Ausdruck $F(u)$ von $x + iy$ nicht abhängig sei. Es kann sich jedoch ereignen, dass in Folge der Werthe von x und y einige der Anfangsglieder in (16) gleichzeitig verschwinden, und etwa die Relationen

$$(17) \quad \sigma_0 > 0, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_{r-2} = \sigma_{r-1} = 0, \sigma_r > 0$$

veranlassen. In diesem Falle erhalten wir durch Heraushebung des nicht verschwindenden Factors $e^{\alpha_0 i} \sigma_0$ aus (9) folgende Gleichung:

$$(18) \quad \dot{\sigma}_0 e^{i\alpha_0} = \sigma_0 e^{i\alpha_0} \left\{ 1 + \varepsilon^r \frac{\sigma_r}{\sigma_0} e^{[r\mu + \alpha_r - \alpha_0]i} + \rho^{r+1} \frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_0} e^{[(r+1)\mu + \alpha_{r+1} - \alpha_0]i} + \dots \right\}.$$

In dem hier eingeklammerten Polynome sind bei gehörig kleinem ρ zwei der Anfangsglieder genügend, um seinen Werth in Bezug auf Grösse und Vorzeichen zu beurtheilen; auch steht es uns frei, für ein gehörig kleines positives ε die Erfüllung der Bedingung

$$(19) \quad \rho^r \frac{\sigma_r}{\sigma_0} e^{[r\mu + \alpha_r - \alpha_0]i} = -\varepsilon^r$$

zu beanspruchen. Hieraus folgt:

$$(20) \quad \rho e^{\mu i} = \Delta x + i \Delta y = \varepsilon (-1)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_r} \right)^{\frac{1}{r}} e^{\frac{(\alpha_0 - \alpha_r)}{r} i} \quad \text{und}$$

$$\Delta x = \varepsilon (-1)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_r} \right)^{\frac{1}{r}} \cos \frac{(\alpha_0 - \alpha_r)}{r}, \quad \Delta y = \varepsilon (-1)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_r} \right)^{\frac{1}{r}} \sin \frac{(\alpha_0 - \alpha_r)}{r}.$$

Dann findet man aus (18):

$$\dot{\sigma}_0 e^{\dot{\sigma}_0 i} = \sigma_0 e^{\alpha_0 i} [1 - \varepsilon^r] \quad \text{und wegen} \quad 1 - \varepsilon^r < 1 \quad (21)$$

$$\dot{\sigma}_0 < \sigma_0$$

wie dies schon bei (15) angedeutet wurde.

Setzt man $x + \Delta x = \dot{x}$, $y + \Delta y = \dot{y}$, so belehrt uns die vorstehende Relation, dass man in Bezug auf das Polynom $F(u)$ von einem Grössensysteme $[x, y, \sigma_0]$ falls $\sigma_0 > 0$, immerhin zu einem anderen Grössensystem $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{\sigma}_0]$ gelangen kann, wobei man eine Verkleinerung der mit σ_0 bezeichneten Grösse erzielt. In dieser Weise verfahren, gelangen wir nach und nach zu den Grössensystemen:

$$[\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\sigma}_0], [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}] \dots [x^{(m)}, y^{(m)}, \sigma_0^{(m)}] \quad \text{mit der Bedingung:} \quad (22)$$

$$\sigma_0 > \dot{\sigma}_0 > \ddot{\sigma}_0 \dots > \sigma_0^{(m-1)} > \sigma_0^{(m)}$$

und können selbstverständlich dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis wir zu einem Grössensystem etwa

$$[x^{(n)}, y^{(n)}, \sigma_0^{(n)}] \quad (23)$$

kommen, wobei mit erwünschter Genauigkeit $\sigma_0^{(n)}$ dem Nullwerth nahe gebracht sein wird. Diesfällg erhält man eben so genau:

$$F(u) \begin{cases} u = x + iy \\ u = x + iy \end{cases} = F(x + iy) = \sigma_0^{(n)} e^{\alpha_0^{(n)} i} = 0, \quad (24)$$

und man darf erklären, dass der Ausdruck $u = x + iy$ mit Rücksicht auf die beanspruchte Genauigkeit eine Wurzel der Gleichung (1) ausmache.

Man hat für beliebiges ganze n : $(-1) = e^{i(2n+1)\pi}$, hiemit auch

$$(-1)^{\frac{1}{r}} = e^{i(2n+1)\frac{\pi}{r}}. \quad (25)$$

Durch Einführung dieses Werthes in (20) ist

$$\begin{aligned} (\Delta x)_n &= \varepsilon \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_r} \right)^{\frac{1}{r}} \cos \frac{[\alpha_0 - \alpha_r + (2n+1)\pi]}{r} \\ (\Delta y)_n &= \varepsilon \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_r} \right)^{\frac{1}{r}} \sin \frac{[\alpha_0 - \alpha_r + (2n+1)\pi]}{r}. \end{aligned} \quad (26)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass man vom Initialwerthe $u = x + iy$ aus in dem oben angezogenen Falle r von einander verschiedene Nachbarwerthe erhält, welche die Eigenschaft besitzen, der mit $\dot{\sigma}_0$ angedeuteten Grösse einen unter σ_0 stehenden Werth zu ertheilen. Diese r Werthe gehen aus

$$[x + (\Delta x)_n] + i[y + (\Delta y)_n] \quad (27)$$

hervor, sobald man für n nach und nach die Werthe $0, 1, 2, 3, \dots, r-2, r-1$ annimmt, und diesen Zeigern entsprechend nach (26) die Grössen Δx und Δy auswerthet.

Der Initialwerth $x + iy$ ist diesfällg ein Ausgangswerth von r verschiedenen Wurzelwerthen, und insofern r auf einen die Einheit überschreitenden Werth deutet, wollen wir diesem Initialwerth $x + iy$ die im

analogen Fall der Fourier'schen Gleichungstheorie adoptirte Benennung indicatorischer Werth (28) ertheilen.

Jeder andere beliebig angenommene Initialwerth kann den Fall $r=1$ herbeiführen, braucht somit durch eine besondere Benennung nicht erst hervorgehoben zu werden.

Dieser Auseinandersetzung zufolge ist für die Gleichung (1) eine Anwartschaft in Aussicht gestellt, vermöge welcher mehr von einander verschiedene Werthe von der Form $x+iy$ als Wurzeln dieser Gleichung aufzutreten vermögen; und es entsteht die Frage: Wie gross ist die Anzahl der Wurzeln, welche einer vor- (29) gelegten Gleichung angehören?

Zu diesem Behufe schreiben wir die Gleichung (1) in der Form:

$$(30) \quad F(u) = B_n u^n + B_{n-1} u^{n-1} + \dots + B_2 u^2 + B_1 u + B_0 = 0$$

auf, was wir immerhin thun dürfen, sobald wir die mit B bezeichneten Coëfficienten in der Form $p+qi$ voraussetzen.

Um aller Wurzeln dieser Gleichung habhaft zu werden, könnte man auf Grund der vorigen Auseinandersetzung also verfahren: Durch das Nullsetzen der successiven Ableitungen des Gleichungspolynomes $F(u)$ erhalten wir:

$$(31) \quad F_1(u) = 0, \quad F_2(u) = 0 \dots F_{n-2}(u) = 0, \quad F_{n-1}(u) = 0,$$

also $(n-1)$ neue Gleichungen, welche beziehungsweise dem $(n-1)$ ten, $(n-2)$ ten ... 3ten, 2ten, 1ten Grade angehören. Jede Wurzel irgend einer der Gleichungen (31) tritt als indicatorischer Werth der Wurzeln der nächst vorhergehenden Gleichung auf. Demgemäss bestimme man die Wurzel der dem 1ten Grade angehörigen Gleichung $F_{n-1}(u) = 0$, und erhält den indicatorischen Werth zweier Wurzeln der Gleichung $F_{n-2}(u) = 0$. Jede der Wurzeln dieser Gleichung indicirt wieder zwei Wurzeln der Gleichung $F_{n-3}(u) = 0$, wobei es sich ereignen kann, dass man von verschiedenen indicatorischen Werthen ausgehend, zu einer und derselben Wurzel der nächst vorhergehenden Gleichung geleitet wird.

Auf diese Weise verfahren, gelangt man zu den Wurzeln der Gleichung $F_1(u) = 0$, welche wieder die der Gleichung (30) angehörigen Wurzeln indiciren und zum Ausgangspunkte ihrer Berechnung dienen.

Die eben besprochene Staffelmethode könnte in der That zur Ausmittlung der Wurzelwerthe der in (30) vorgelegten Gleichung dienen, ist jedoch in der Effectuirung so mühsam und complicirt, dass man in dieser Beziehung gerne nach jedem Erleichterungsmittel sich umsieht, und sich höchstens begnügt, die der Staffelmethode zu Grunde liegende Idee beim theoretischen Ausbau anderer Auflösungsmethoden auszubeuten.

Sei nun: $w_n = p_n + q_n i$ eine Wurzel der in (30) vorgelegten Gleichung

$$(32) \quad F(u) = \overset{n}{F}(u) = 0,$$

wobei der oben angesetzte Zeiger n auf den Grad dieser Gleichung hindeuten mag.

Durch Division mit dem Ausdrücke $(u-w_n)$ erhalten wir folgende für jedes u geltende Relation:

$$(33) \quad \overset{n}{F}(u) = \overset{n-1}{F}(u)[u-w_n] + r_n,$$

wo $\overset{n-1}{F}(u)$ den dem $(n-1)$ ten Grade angehörigen Quotus, und r_n den eventuellen Rest andeuten mag.

Für $u = w_n$ erhält man aus (33) wegen der Eigenschaft von w_n als Wurzel der Gleichung $\overset{n}{F}(u) = 0$

$$r_n = 0, \text{ hiemit}$$

$$(34) \quad \overset{n}{F}(u) = (u-w_n) \overset{n-1}{F}(u),$$

wodurch besagt wird, dass ein jedes Polynom der Form (30) als ein Product dargestellt werden kann, aus einem Polynom des um eine Einheit niedrigeren Grades, und einem Binom $(u-w_n)$, dessen entgegengesetzt

genommener zweiter Theil eine Wurzel der aus der Nullsetzung des Polynoms (30) hervorgehenden Gleichung ausmacht. Dieses Binom soll von nun an der Wurzelfactor des gedachten Polynoms $\overset{n}{F}(u)$ heissen.

Auf Grund (24) schliesst man eben, dass ein jedes Polynom $\overset{s}{F}(u)$ durch einen passenden u -Werth $= w_s$ auf Null gebracht werden kann, — dass es somit gestattet sei, für ein beliebiges s die Gleichung

$$\overset{s}{F}(u) = (u - w_s) \overset{s-1}{F}(u) \quad (35)$$

anzuschreiben. Wenn man diese Gleichung in Bezug auf s für die Werthe: $n, n-1, \dots, 3, 2, 1$ specialisirt, und die dadurch entstehenden Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man nach Weglassung des beiderseits vorkommenden gemeinschaftlichen Factors folgende Gleichung:

$$\overset{n}{F}(u) = B_n(u - w_1)(u - w_2)(u - w_3) \dots (u - w_{n-1})(u - w_n) = 0, \quad (36)$$

wo $B_n = \overset{0}{F}(u)$ den Coefficienten von u^n in $\overset{n}{F}(u)$ andeutet. Jede von den Zahlen $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ ertheilt dem Polynom $\overset{n}{F}(u)$ den Nullwerth, sobald man dieselbe in dieses Polynom an die Stelle von u einführt. Es ist demnach eine jede dieser Zahlen eine Wurzel, und ein jedes der Binome $(u - w_1), (u - w_2), \dots (u - w_n)$ ein Wurzelfactor der Gleichung (30). Eine unter den Zahlen $w_1, w_2, \dots w_n$ nicht vorkommende Zahl w ist nicht fähig, das in (36) ersichtliche Product auf Null zu bringen — ist somit auch nicht fähig eine Wurzel der Gleichung (30) darzustellen.

Eine Gleichung des n ten Grades besitzt somit n Wurzeln und nicht mehr. (37)

Sind mehrere dieser Wurzeln einander gleich, und ist etwa $w_1 = w_2 = w_3 = \alpha$, so ist das betreffende Gleichungspolynom durch $(u - \alpha)^3$ theilbar, und man sagt: die Wurzel $= \alpha$ ist eine dreifache oder eine dreimal wiederholte Wurzel der Gleichung (30).

Aus (36) erhält man:

$$\begin{aligned} \overset{n}{F}(u+k) &= B_n[u - (w_1 - k)][u - (w_2 - k)] \dots [u - (w_n - k)] = 0 \\ \overset{n}{F}(uk) &= B_n k^n (u - \frac{w_1}{k})(u - \frac{w_2}{k}) \dots (u - \frac{w_n}{k}) = 0 \\ \overset{n}{F}(\frac{u}{k}) &= \frac{B_n}{k^n} (u - k w_1)(u - k w_2) \dots (u - k w_n) = 0 \\ \overset{n}{F}(u^k) &= B_n (u^k - (\sqrt[k]{w_1})^k)(u^k - (\sqrt[k]{w_2})^k) \dots (u^k - (\sqrt[k]{w_n})^k) = 0 \\ \overset{n}{F}(\sqrt[k]{u}) &= B_n (\sqrt[k]{u} - \sqrt[k]{w_1})(\sqrt[k]{u} - \sqrt[k]{w_2}) \dots (\sqrt[k]{u} - \sqrt[k]{w_n}) = 0, \quad \text{d. h.} \end{aligned} \quad (38)$$

Wenn man in der Gleichung $\overset{n}{F}(u) = 0$ mit dem Wurzelrepräsentanten u die Constante k durch irgend eine Operation verbindet, so muss man diese Constante k mit einer jeden ihrer Wurzeln durch die entgegengesetzte Operation verbinden, um die Wurzeln der jeweiligen transformirten Gleichung zu erhalten. (39)

Vermöge (36) lässt sich das Gleichungspolynom $\overset{n}{F}(u) = 0$ aus gegebenen Wurzeln $w_1, w_2, \dots w_{n-1}, w_n$ in folgender Weise aufbauen:

Um etwa bei dem angenommenen ersten Coefficienten B_n irgend einen anderen Coefficienten, etwa B_{n-s} , zu erhalten, bilde man sich aus den entgegengesetzt genommenen Wurzeln $-w_1, -w_2, -w_3 \dots -w_n$ alle möglichen Combinationen zur s ten Classe, betrachte jede dieser Combinationsformen als ein Product der in derselben enthaltenen Elemente, und verbinde schliesslich die so erhaltenen Producte durch Addition. Stellt S_s diese Summe vor, so erhält man zur Bestimmung von B_{n-s} folgende Relation:

$$B_{n-s} = B_n \cdot S_s. \quad (40)$$

Demgemäss erhält man auch :

$$(41) \quad \begin{aligned} B_{n-1} &= -B_n(w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n), \\ B_0 &= B_{n-n} = (-1)^n B_n w_1 w_2 w_3 \dots w_n. \end{aligned}$$

Wenn man etwa die Wurzeln w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 ins Auge fasst, so können wir dem angeführten Bildungsgesetze gemäss folgendes bemerken :

$$(42) \quad \begin{array}{llllllll} 1. & \text{Zur Bildung von } B_0 & \text{gelangen alle 5 Wurzeln als Factoren zur Verwendung;} \\ 2. & \text{Zur Bildung der combinatorischen Summanden in } B_1 & \text{gelangen wenigstens vier,} \\ 3. & \text{" " " " " " in } B_2 & \text{" " drei,} \\ 4. & \text{" " " " " " in } B_3 & \text{" " zwei,} \\ 5. & \text{" " " " " " in } B_4 & \text{gelangt " eine} \end{array}$$

von den ins Auge gefassten fünf Wurzeln als Multiplicatoren zur Verwendung.

Schreibt man die erste Gleichung in (38) in folgender Form an :

$$(43) \quad F(u+k) = B_n u^n + B'_{n-1} u^{n-1} + B'_{n-2} u^{n-2} + \dots + B'_3 u^3 + B'_2 u^2 + B'_1 u + B'_0 = 0$$

und setzt

$$w_1 - k = w'_1, w_2 - k = w'_2, w_3 - k = w'_3, \dots, w_{n-1} - k = w'_{n-1}, w_n - k = w'_n;$$

nimmt man ferner an, dass in (36) die Wurzeln w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 in Beziehung auf ν Anfangsstellen mit einander übereinstimmen, und dass eben k diejenige Zahl sei, welche den Inbegriff der gemeinschaftlichen Anfangsstellen dem Stellenwerthe und Vorzeichen nach vorstellt, dann wird nothwendiger Weise jede der Wurzeln $w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5$ in Bezug auf ihre Charakteristik wenigstens um ν Einheiten tiefer ausfallen, als dies bei den Wurzeln w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 der Fall war.

Behufs der Angabe der Charakteristik der in (43) angeführten Coëfficienten gibt bei jedem derselben derjenige combinatorische Summand den Ton an, welcher in Bezug auf seine Charakteristik die geringste Senkung beurkundet, — also derjenige, bei dessen Bildung die geringste Anzahl von den Wurzeln $w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5$ thätig war. Wenn man überdies die Bemerkung in (42) zu Rathe zieht, so gelangt man zu folgenden Ergebnissen :

$$(44) \quad \begin{array}{llllllll} \text{Die Charakteristik von } B'_0 & \text{ist um } 5\nu & \text{Einheiten tiefer, als die von } B_0, \\ \text{" " " } B'_1 & \text{" " } 4\nu & \text{" " " } B_1, \\ \text{" " " } B'_2 & \text{" " } 3\nu & \text{" " " } B_2, \\ \text{" " " } B'_3 & \text{" " } 2\nu & \text{" " " } B_3, \\ \text{" " " } B'_4 & \text{" " } 1\nu & \text{" " " } B_4. \end{array}$$

Es ergibt sich demgemäss beim Übergange von den Coëfficienten B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 zu den entsprechenden $B'_0, B'_1, B'_2, B'_3, B'_4$ ein regelmässiges Abfallen beziehungsweise um $5\nu, 4\nu, 3\nu, 2\nu, 1\nu$ Einheiten. In Betreff der weiteren Coëfficienten $B'_5, B'_6, \dots$ wissen wir, dass bei denselben auch solche combinatorische Summanden vorkommen, welche von den Factoren $w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5$ gar nicht afficirt sind, somit kann von einer derartigen Beeinflussung auf die Erhöhung oder Erniedrigung ihrer Charakteristik für weiteres keine Erwähnung gemacht werden.

Besitzt die Gleichung (30) und respective die Gleichung (1) blos primäre Glieder, so ist in diesem Falle identisch $\varphi(u) = 0$, und $f(u) = F(u)$. In diesem Falle erhält man ganz allgemein :

$$(45) \quad \begin{aligned} s! Z_s &= s! \sigma_s \cos \alpha_s = F_s(x) \cos D = F_s(x) \left[1 - \left(\frac{d}{dx} \right)^2 \frac{y^2}{2!} + \dots \right] \\ s! z_s &= s! \sigma_s \sin \alpha_s = F_s(x) \sin D = F_s(x) \left[\frac{d}{dx} \frac{y}{1!} - \left(\frac{d}{dx} \right)^3 \frac{y^3}{3!} + \dots \right], \text{ also auch } \end{aligned}$$

$$s! Z_s = F_s(x) - F_{s+2}(x) \frac{y^2}{2!} + F_{s+4}(x) \frac{y^4}{4!} - \dots$$

$$s! z_s = y \left[F_{s+1}(x) - F_{s+3}(x) \frac{y^2}{3!} + F_{s+5}(x) \frac{y^4}{5!} - \dots \right] \quad (46)$$

$$Z_0 = F(x) - F_2(x) \frac{y^2}{2!} + F_4(x) \frac{y^4}{4!} - \dots$$

$$z_0 = y \left[F_1(x) - F_3(x) \frac{y^2}{3!} + F_5(x) \frac{y^4}{5!} - \dots \right] \quad (47)$$

Die Erfüllung der Gleichung

$$F(u) = F(x + iy) = 0 \quad (48)$$

verlangt eine solche Wahl der Werthe von x, y , dass hiedurch

$$\sigma_0 = Z_0 = z_0 = 0 \quad (49)$$

sich ergebe. Dies kann auf Grund der Relationen (47) auf zweierlei Weise herbeigeführt werden, und zwar indem man

$$1. \quad F(x) = y = 0 \quad \text{oder} \quad (50)$$

$$2. \quad \begin{cases} F(x) - F_2(x) \frac{y^2}{2!} + F_4(x) \frac{y^4}{4!} - \dots = 0 \\ F_1(x) - F_3(x) \frac{y^2}{3!} + F_5(x) \frac{y^4}{5!} - \dots = 0 \end{cases} \quad (51)$$

Aus (50) resultiren bloß primäre Wurzeln. Aus (51) gewinnt man die übrigen Wurzeln, welche die complexe Form $x + iy$ besitzen, und sieht gleichzeitig ein, dass im letzteren Falle auch $x - iy$ eine Wurzel der vorgelegten Gleichung sein muss, da ja das Vorzeichen von y auf die Erfüllung oder Nichterfüllung der Gleichungen (51) gar keinen Einfluss zu üben vermag. Solche Wurzeln, wie $x + iy, x - iy$ heissen conjugirte complexe Wurzeln. (52)

Das entsprechende Product von einander conjugirten Wurzelfactoren erhält man:

$$\{u - [x + iy]\} \{u - [x - iy]\} = (u - x)^2 + y^2, \quad (53)$$

welches für beliebige primäre Werthsysteme von (u, x, y) stets einen positiven Werth beibehält.

Wenn nun die mit primären Coefficienten versehene Gleichung $F(u) = 0$ die primären Wurzeln $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{v-1}, u_v$, und sonst lauter complexe Wurzeln besitzt, so müssen letztere in gerader Anzahl sich einfinden, und sich in Paare von je einander conjugirten Wurzeln anordnen lassen. Bezeichnet man das Product aller conjugirten Wurzelfactoren mit $\psi(u)$, so schliessen wir aus (53) unmittelbar, dass der Ausdruck $\psi(u)$ für jeden primären Werth von u einen positiven Werth beibehalten muss.

Diesfällig nimmt die Gleichung (30) folgende Gestalt an:

$$F(u) = B_n [u - u_1] [u - u_2] \dots [u - u_v] \psi(u) = 0, \quad (54)$$

wobei wir einstweilen die Anordnung der primären Wurzeln so treffen, dass für dieselben die Relation

$$u_1 < u_2 < u_3 \dots < u_{v-1} < u_v, \quad (55)$$

erfüllt wird.

Aus (54) erhält man :

$$(56) \quad F_1(u) = \frac{F(u)}{u-u_1} + \frac{F(u)}{u-u_2} + \dots + \frac{F(u)}{u-u_\nu} + B_n(u-u_1)(u-u_2)\dots(u-u_\nu) \frac{d\psi(u)}{du};$$

hieraus :

$$(57) \quad \begin{aligned} F_1(u_1) &= \left. \frac{F(u)}{u-u_1} \right|_{u=u_1} = B_n(u_1-u_2)(u_1-u_3)\dots(u_1-u_\nu) \psi(u_1) \\ F_1(u_2) &= \left. \frac{F(u)}{u-u_2} \right|_{u=u_2} = -B_n(u_1-u_2)(u_2-u_3)\dots(u_2-u_\nu) \psi(u_2). \end{aligned}$$

Auf Grund der Relationen (55) sind die in (57) rechter Hand ersichtlichen Producte mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet, und bethätigen dadurch, dass der Ausdruck $F_1(u)$ bei den Satzungen $u = u_1$, $u = u_2$ entgegengesetzte Werthe annehmen muss. Da nun $F_1(u)$ eine stetige Function ist, so muss es wenigstens Einen zwischen u_1 und u_2 liegenden primären Werth u' , geben, für welchen $F_1(u)$ den Nullwerth annimmt, welcher somit eine primäre Wurzel der Gleichung

$$(58) \quad F_s(u) = 0 \quad \text{sein muss.}$$

Auf gleiche Weise lässt sich darthun, dass sich zu den Paaren $[u_2, u_3]$, $[u_3, u_4]$, $[u_{\nu-1}, u_\nu]$ wenigstens je ein Zwischenwerth finden lässt, welcher eine, und zwar eine primäre Wurzel der Gleichung (58) ausmacht.

(59) Es deuten also ν primäre Wurzeln der Gleichung $F(u) = 0$ auf wenigstens $(\nu-1)$ primäre Wurzeln der Gleichung $F_1(u) = 0$ hin.

Die eben ausgesprochene Behauptung gilt immerhin, wenn die Differenzen je zweier in (55) erwähnten Nachbarwurzeln beliebig klein ausfallen, hiemit auch dann, wenn diese Differenzen verschwinden.

(60) In diesem Falle gehört eine μ -mal wiederholte Wurzel der Gleichung $F(u) = 0$ als eine $(\mu-1)$ -mal wiederholte Wurzel der Gleichung $F_1(u) = 0$ an. Dass der hier ausgesprochene Satz sogar für die Gleichung (1) und selbst dann gilt, wenn die wiederholte Wurzel eine complexe ist, überzeugt man sich leicht, wenn man zum Gleichungspolynom (36) die Gleichung $\frac{dF(u)}{du} = F_1(u) = 0$ auf die in (56) ersichtliche Weise ableitet und dann aus der Anzahl der gleichen Wurzelfactoren in $F(u)$ auf die Anzahl gleicher Wurzelfactoren in $F_1(u)$ schliesst.

Wenn wir die Aufeinanderfolge der Gleichungen

$$(61) \quad F_s(u) = 0; \quad F_{s+1}(u) = \frac{dF_s(u)}{du} = 0$$

dadurch kennzeichnen, dass wir der ersteren die Benennung Stammgleichung und der zweiten den Namen abgeleitete Gleichung zuerkennen, so wird es nicht schwer fallen, zu den im Vorhergehenden ausgesprochenen Relationen noch folgende hinzuzufügen :

1. m verschiedene primäre Wurzeln der Stammgleichung verbürgen die Existenz von mindestens $(m-1)$ verschiedenen primären Wurzeln in der abgeleiteten Gleichung;

2. m gleiche Wurzeln der Stammgleichung gehören den abgeleiteten Gleichungen in 1ter, 2ter $\dots$ ν ter Abstufung, respective in den Anzahlen

$$(62) \quad m-1, \quad m-2, \quad m-3, \quad \dots, \quad m-(\nu-1), \quad m-\nu$$

an.

3. Der indicatorische Werth von m conjugirten Wurzelpaaren, welche etwa der Gleichung $F_s(u) = 0$ angehören, deutet an, dass diese dem $(n-s)$ ten Grade angehörige Gleichung höchstens $(n-s-2m)$ pri-

märe Wurzeln besitzen kann. In weiterer Folge sind hiedurch in dem $(n-s+1)$ ten Grade angehörigen Gleichung $F_{s-1}(u) = 0$ höchstens $(n-s+1-2m)$ primäre, und somit wenigstens m conjugirte Wurzelpaare indicirt, weil sonst im Widerspruche mit dem Oberwähnten der Gleichung $F_s(u) = 0$ mehr primäre Wurzeln zukommen müssten, als die Zahl $(n-s-2m)$ beträgt. In ähnlicher Weise fortschliessend, können wir behaupten, dass der indicatorische Werth von m conjugirten Wurzelpaaren in $F_s(u) = 0$ wenigstens eben so viele, nämlich m conjugirte Wurzelpaare in jeder der Gleichungen

$$F_{s-1}(u) = 0, F_{s-2}(u) = 0 \dots F_2(u) = 0, F_1(u) = 0, F(u) = 0$$

beansprucht.

§. 2.

Räumliche Deutung der Gleichungen und ihrer Wurzeln.

Der Ausdruck:

$$F(x+iy) = [f(x) \cos D - \varphi(x) \sin D] + i[f(x) \sin D + \varphi(x) \cos D] = Z_0 + iz_0, \quad (1)$$

in welchem die symbolischen Differentiationsdeterminanten nach (7) §. 1 zu deuten sind, lässt in Bezug auf seinen primären Bestandtheil Z_0 , als auch in Bezug auf seinen secundären z_0 eine räumliche Darstellung zu, und zwar in folgender Weise: In Bezug auf ein orthogonales Axensystem ox, oy, oz denke man sich den angenommenen Ausdruck $(x+iy)$ als den Träger der Coordinaten x, y eines in der Ebene xoy liegenden Punktes p , und räumt demgemäss in der analytischen Ausdrucksweise folgende Äquivalenz ein:

$$\text{Der in } xoy \text{ befindliche Punkt } p \equiv \text{der Punkt } (x+iy). \quad (2)$$

Die aus der Annahme des Punktes $(x+iy)$ sich ergebenden Werthe von Z_0 und z_0 benütze man zur Bestimmung der Punkte P, p im Raume in der Weise, dass beide in einer in p auf xoy errichteten Senkrechten sich befinden, und zwar der erstere in der Entfernung $= Z_0$, der zweite in der Entfernung $= z_0$. Mit Rücksicht auf die in (1) ersichtliche Bedeutung von Z_0 und z_0 soll von den im angegebenen Sinne einander zugeordneten-conjugirten Punkten P und p , der erstere ein primärer, der letztere ein secundärer Punkt genannt werden. (3)

Durch zweckmässige Annahmen des Ausdruckes $(x+iy)$ gelangt man zu einem beliebigen Punkte in xoy . Zu einem wie immer angenommenen Punktsysteme $p, \dot{p}, \ddot{p}, \ddot{\ddot{p}} \dots$ in xoy erhält man mittelst entsprechender Werthe von Z_0 ein räumliches Punktsystem $P, \dot{P}, \ddot{P}, \ddot{\ddot{P}} \dots$ und ebenso mittelst entsprechender Werthe von z_0 das Punktsystem $p, \dot{p}, \ddot{p}, \ddot{\ddot{p}} \dots$. Wird das System $p, \dot{p}, \ddot{p} \dots$ als eine continuirliche Punktfolge, das heisst als der Repräsentant der Ebene xoy gedacht, so wird auch das Punktsystem $P, \dot{P}, \ddot{P}, \ddot{\ddot{P}} \dots$ eine continuirliche Punktfolge, d. h. eine krumme Fläche charakterisiren, welche wir unter dem Namen die primäre Hilfsfläche auffassen wollen. Eben so mag das System $p, \dot{p}, \ddot{p} \dots$ den continuirlichen Verlauf der secundären Hilfsfläche andeuten. (4)

Der gegebenen Auseinandersetzung gemäss wird die analytische Darstellung der primären Hilfsfläche durch die Gleichung

$$z = Z_0 = f(x) \cos D - \varphi(x) \sin D \quad (5)$$

und die der secundären Hilfsfläche durch die Gleichung

$$z = z_0 = f(x) \sin D + \varphi(x) \cos D \quad (6)$$

charakterisirt. Durch eine jede der Hilfsflächen wird gerade so, wie durch die Coordinatenebene xoy der ganze Raum je in zwei Raumabtheilungen, d. h. in die obere und untere Raumpartie abgetheilt. Jede von den Hilfsflächen wird von einer beliebig gewählten zu oz parallelen Geraden nur in einem einzigen Punkte getroffen.

Von den Gleichungen

$$(7) \quad Z_0 = 0, \quad z_0 = 0$$

stellt die erstere die primäre Trasse dar, d. h. diejenige Linie, in welcher die Ebene xoy von der primären Hilfsfläche geschnitten wird. Eben so wird durch die zweite Gleichung in (7) die secundäre (8) Trasse charakterisirt. Eine jede Wurzel der Gleichung $F(u) = 0$, nämlich $u = x + iy$ genügt den Gleichungen (7) gleichzeitig, deutet somit auf einen sogenannten Wurzepunkt p hin, welcher der primären und secundären Trasse gemeinschaftlich angehört.

Da nun die dem n ten Grade angehörige Gleichung $F(u) = 0$ nothwendig n Wurzeln besitzt, so sind hiedurch n Wurzepunkte in der Ebene xoy sichergestellt, und es wird hiedurch bethätigt, dass die oberwähnten Trassen nothwendig existiren und sich gegenseitig in n Punkten begegnen müssen. Gleiche Wurzeln deuten selbstverständlich auf vielfache Wurzepunkte hin.

Errichtet man etwa in den Punkten der secundären Trasse Senkrechte auf xoy , und verlängert selbe bis zur Begegnung mit der primären Hilfsfläche, so erhält man einen continuirlichen Linienzug, welcher (9) einen wellenförmigen Verlauf hat, und die Ebene xoy nothwendig in n Wurzepunkten durchstosst. Diesen auf der primären Hilfsfläche lagernden Linienzug wollen wir mit der Benennung primärer conjugirter Linienzug kennzeichnen. In gleicher Weise mag auch der secundäre conjugirte Linienzug aufgefasst werden.

Der in §. 1 sub (6) und (7) adoptirten Bezeichnung gemäss findet man:

$$Z_s = [f_s(x) \cos D - \varphi_s(x) \sin D] : s! \quad , \quad z_s = [f_s(x) \sin D + \varphi_s(x) \cos D] : s!$$

$$\frac{d^m \cos D}{dy^m} = \cos \left(D + \frac{m\pi}{2} \right) \left(\frac{dD}{dy} \right)^m = \cos \left(D + \frac{m\pi}{2} \right) \left(\frac{d}{dx} \right)^m,$$

$$\frac{d^m \sin D}{dy^m} = \sin \left(D + \frac{m\pi}{2} \right) \left(\frac{dD}{dy} \right)^m = \sin \left(D + \frac{m\pi}{2} \right) \left(\frac{d}{dx} \right)^m, \quad \text{hiemit}$$

$$\frac{d^{2m} Z_s}{dy^{2m}} = \frac{(-1)^m}{s!} [f_{s+2m}(x) \cos D - \varphi_{s+2m}(x) \sin D] = (-1)^m \frac{(s+2m)!}{s!} z_{s+2m},$$

$$\frac{d^{2m+1} Z_s}{dy^{2m+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{s!} [f_{s+2m+1}(x) \sin D + \varphi_{s+2m+1}(x) \cos D] = (-1)^{m+1} \frac{(s+2m+1)!}{s!} z_{s+2m+1}.$$

Auf diese Weise vorgehend gelangt man zu folgendem Täfelchen:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{d^{2m} Z_s}{dy^{2m}} &= (-1)^m \frac{(s+2m)!}{s!} Z_{s+2m}, & \frac{d^{2m} z_s}{dy^{2m}} &= (-1)^m \frac{(s+2m)!}{s!} z_{s+2m}, \\ \frac{d^{2m+1} Z_s}{dy^{2m+1}} &= (-1)^{m+1} \frac{(s+2m+1)!}{s!} z_{s+2m+1}, & \frac{d^{2m+1} z_s}{dy^{2m+1}} &= (-1)^m \frac{(s+2m+1)!}{s!} Z_{s+2m+1}, \\ \frac{d^m Z_s}{dx^m} &= \frac{(s+m)!}{s!} Z_{s+m}, & \frac{d^m z_s}{dx^m} &= \frac{(s+m)!}{s!} z_{s+m}, \\ \frac{d^{2m+r+1} Z_s}{dy^{2m+1} dx^r} &= (-1)^{m+1} \frac{(s+2m+r+1)!}{s!} z_{s+2m+r+1}, & \frac{d^{2m+r+1} z_s}{dy^{2m+1} dx^r} &= (-1)^m \frac{(s+2m+r+1)!}{s!} Z_{s+2m+r+1}, \\ \frac{d^{2m+r} Z_s}{dy^{2m} dx^r} &= (-1)^m \frac{(s+2m+r)!}{s!} Z_{s+2m+r}, & \frac{d^{2m+r} z_s}{dy^{2m} dx^r} &= (-1)^m \frac{(s+2m+r)!}{s!} z_{s+2m+r}. \end{aligned}$$

Zur Darstellung des primären conjugirten Linienzuges dienen die Gleichungen:

$$(11) \quad z = Z_0, \quad z_0 = 0$$

Durch Differentiation derselben folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= Z_1 - z_1 \frac{dy}{dx} ; \quad z_1 + Z_1 \frac{dy}{dx} = 0, \text{ hiemit} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{Z_1^2 + z_1^2}{Z_1} = \frac{\sigma_1^2}{Z_1} ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{z_1}{Z_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Sind λ, μ, ν die Winkel, welche das im Punkte (x, y, z) anhebende Curvenelement dieses Linienzuges mit den Axen ox, oy, oz bildet, so erhält man aus (12):

$$\cos \lambda = \frac{Z_1}{\sigma_1 \sqrt{1 + \sigma_1^2}} ; \quad \cos \mu = \frac{-z_1}{\sigma_1 \sqrt{1 + \sigma_1^2}} ; \quad \cos \nu = \frac{\sigma_1}{\sqrt{1 + \sigma_1^2}}. \quad (13)$$

Der Werth von $\cos \nu$ wird nur für ein sehr grosses σ_1 zur Einheit, also nur für Punkte, denen sehr grosse x und y zukommen. Daraus geht hervor, dass der conjugirte primäre Linienzug in gehörig weiter Distanz von der Axe oz einen zu dieser Axe parallelen Verlauf nimmt. Ein solcher Linienzug wird vom Punkte (x, y, z) ausgehend, entweder in der Richtung (13) oder in der ihr entgegengesetzten Richtung in seinem Verlauf sich der Ebene xoy nähern, und stellt die Möglichkeit in Aussicht, dass man, diesen Linienzug verfolgend, bis zur Begegnung desselben mit xoy , d. h. bis zu einem Wurzelpunkt gelangt. Es kann jedoch auch als möglicher Fall angesehen werden, dass man die successiv aufeinander folgenden Curvenelemente verfolgend, zu einem Elemente kommt, welches zu xoy parallel liegt, und anzudeuten scheint, dass von da aus der Curvenzweig aufhört sich der xoy weiter zu nähern, sondern vielmehr von dieser Ebene sich wegwendet, um sich von derselben fort und fort zu entfernen. Dieser Fall mag auch im Folgenden einer näheren Prüfung unterzogen werden.

Der Parallelismus eines Curvenelementes zur xoy kann nur in demjenigen Punkt (x, y, z) eintreten, für welchen der in (13) angedeutete Werth von $\cos \nu$ den Nullwerth annimmt, also in dem Falle, wo die Relation $\sigma_1 = Z_1 = z_1 = 0$ Platz greift. Um der zu führenden Untersuchung die möglichst grosse Allgemeinheit zu gewähren, nehmen wir an, dass an die eben angeführte Relation sich zufälligerweise noch die Relationen:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \dots = \sigma_{r-1} = 0 \quad (15)$$

hinzugesellen.

Lässt man x, y, z in $x + dx = x + \rho \cos \mu, y + dy = y + \rho \sin \mu$ übergehen, so erhält man aus (11) nach der im §. 1 sub (10) (11) gegebenen Anleitung:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0 = z + dz &= Z_0 + \rho^r \sigma_r \cos(r\mu + \alpha_r) + \rho^{r+1} \sigma_{r+1} \cos[(r+1)\mu + \alpha_{r+1}] + \& \\ 0 &= z_0 + \rho^r \sigma_r \sin(r\mu + \alpha_r) + \rho^{r+1} \sigma_{r+1} \sin[(r+1)\mu + \alpha_{r+1}] + \&. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen nehmen wegen (11) und wegen des sehr klein gedachten ρ folgende Form an:

$$\dot{Z}_0 = z + dz = Z_0 + \rho^r \sigma_r \cos(r\mu + \alpha_r) ; \quad \sin(r\mu + \alpha_r) = 0. \quad (16)$$

Aus der zweiten in (16) folgt für jedes ganze m :

$$r\mu + \alpha_r = m\pi, \quad \mu_m = m \frac{\pi}{r} - \frac{\alpha_r}{r}. \quad (17)$$

und in Folge dessen gibt die erste in (16):

$$\dot{Z}_0 = z + dz = Z_0 + (-1)^m \sigma_r \rho^r = Z_0 + \dot{z}. \quad (18)$$

Aus (17) erhält man zwei Reihen von μ -Werthen:

$$(\mu_1, \mu_3, \mu_5 \dots \mu_{2r-1})_1 ; \quad (\mu_2 + \mu_4 + \mu_6 \dots \mu_{2r})_2, \quad (19)$$

von welchen die in die erste Reihe gehörigen den ungeraden, dagegen die in die zweite Reihe gehörigen den geraden Werthen von m entsprechen. Der in (18) ersichtliche Zusatz $\}$ nimmt in Bezug auf die zwei Reihen der μ Werthe entgegengesetzte Vorzeichen an, und gestattet unter diesen zwei Reihen diejenige zu wählen, welche dem Producte $\} Z_0$ ein negatives Vorzeichen beibringt. Hiedurch wird bewirkt, dass in numerischer

(20) Rücksicht der Werth von Z_0 kleiner sich gestaltet, als der Werth von Z_0 .

Die in dieser Weise getroffene Wahl der entsprechenden Reihe von μ -Werthen deutet auf r conjugirte primäre Curvenzweige, welche vom Punkte (x, y, z) anhebend in ihrem Verlauf sich der xoy nähern und mindestens nach r Wurzelpunkten hinzielen. Ist r eine gerade Zahl, so besitzen je zwei μ -Werthe, welche um π differiren, gleichzeitig gerade oder ungerade Zeiger. Curvenzweige, welche je einem solchen Winkel entsprechen, bilden einen zusammengehörenden, im Punkte (x, y, z) continuirlich verlaufenden Linienzug, welcher von (x, y, z) ausgehend nach beiden Seiten entweder zur Ebene xoy convergirt oder von derselben sich entfernt.

In Bezug auf jede so zusammengesetzte Curve bildet der Ausgangspunkt (x, y, z) nach Massgabe des (21) Winkelzeigers und des Vorzeichens von Z_0 einen Maximal- oder Minimalpunkt.

Um also die höchsten und tiefsten Punkte etwa von $z = F(u)$ mittelst complexer Werthe der Variablen zu bestimmen, hat man eigentlich ein überbestimmtes Problem vor sich; denn es muss $u = x + iy$ so beschaffen sein, dass $F(x + iy) = Z_0 + iz_0$ primär ausfalle, und dass $F_1(x + iy) = Z_1 + iz_1 = 0$ sich ergebe. Die Wahl der Werthe von x, y erscheint somit an folgende drei Bedingungen geknüpft:

$$(22) \quad z_0 = 0, \quad z_1 = 0, \quad Z_1 = 0$$

und dieser können wir nur beim Vorhandensein einer gewissen speciellen Beschaffenheit der in $F(u)$ spielenden Coëfficienten Genüge leisten.

Im Punkte p auf der Ebene xoy , dessen Bestimmungsgrösse $x + iy$ den Relationen $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{r-1} = 0$ genügt, errichte man eine Senkrechte und findet in den Höhen Z_0 und z_0 das conjugirte Punktepaar P, p , von denen der erstere auf der primären, der zweite auf der secundären Hilfsfläche sich befindet. In diesen Punkten haben die Hilfsflächen horizontale Berührungsebenen, von welchen selbe in der Ordnung $(r-1)$ berührt werden. Die secundäre Hilfsfläche wird ausserdem in p geschnitten, und zwar in $2r$ Curvenzweigen, deren Ausgangselemente in Bezug auf ihre Richtung den in (19) dargestellten Winkeln entsprechen. Die durch p gelegten horizontalen Geraden mit den in (19) dargestellten Richtungen berühren die secundäre Hilfsfläche in der Ordnung r .

Eben so findet man in Bezug auf die Berührung in P ein System von $2r$ Geraden, welche die primäre Hilfsfläche in der Ordnung r berühren und ihre Richtungen aus der Relation $\cos(\alpha_r + r\mu) = 0$ oder aus der Relation $\alpha_r + r\mu'_m = m\pi + \frac{\pi}{2}$ beziehen, sobald man m der Reihe nach eine jede von den Zahlen $1, 2, 3, \dots, 2r$ sein lässt. Man findet das Winkelsystem $[\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \dots, \mu'_{2r-1}, \mu'_{2r}]$ mit der Bestimmungsgleichung

$$(24) \quad \mu'_m = \frac{m}{r} \pi + \frac{\pi}{2r} - \frac{\alpha_r}{r}$$

und erhält aus der Vergleichung mit (19)

$$(25) \quad \mu'_m - \mu_m = \frac{\pi}{2r}; \quad \mu_{s+1} - \mu_s = \mu'_{s+1} - \mu'_s = \frac{\pi}{r}.$$

Denkt man sich in der Ebene xoy durch p ein System von $4r$ Strahlen in den durch μ und μ' angedeuteten Richtungen gelegt, so werden je zwei Nachbarstrahlen den Winkel $\frac{\pi}{2r}$ einschliessen dergestalt, dass je ein Strahl des Systems (24) den Winkel halbt, welcher von zwei Nachbarstrahlen des Systemes (19) gebildet wird, und umgekehrt.

Kommt zu den Relationen $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{r-1} = 0$ noch die Relation $\sigma_0 = Z_0 = z_0 = 0$ hinzu, so fallen die Punkte P und p mit p zusammen, und in diesem Falle stellen die erwähnten $4r$ Stralen um den Punkt p herum eben so viele Curvelemente der Trassen vor, welche abwechselnd der primären und secundären Fläche (26) angehören. Der Punkt p ist diesfällg ein r facher Wurzelpunkt, und der Ausdruck $x + iy$ eine r fache Wurzel der Gleichung $F(u) = 0$.

In Beziehung auf den continuirlichen Verlauf eines primären conjugirten Curvenzweiges bilden wir uns durch successive Differentiation der der secundären Trasse angehörigen Gleichung $z_0 = 0$ folgendes Schema:

$$\begin{aligned} Z_1 y_1 + z_1 &= 0 \\ Z_1 y_2 - z_2 y_1^2 + 2 Z_2 y_1 + z_2 &= 0 \\ Z_1 y_3 + 2(Z_2 - z_2 y_1) y_2 - Z_3 y_1^3 - 3 z_3 y_1^2 + 3 Z_3 y_1 + z_3 &= 0 \\ Z_1 y_4 + 2(Z_2 - z_2 y_1) y_3 - z_2 y_2^2 + 3(-Z_3 y_1^2 - 2 z_3 y_1 + Z_3) y_2 + \\ &+ (z_4 y_1^4 - 4 Z_4 y_1^3 - 6 z_4 y_1^2 + 4 Z_4 y_1 + z_4) = 0 \dots \& \end{aligned} \quad (27)$$

wobei ganz allgemein $s! y_s = \frac{d^s y}{dx^s}$ verstanden wird.

Sei nun $x + iy$ einem Punkte der secundären Trasse angehörig, welcher bereits in einer angebbaren Distanz von einem vielfachen Punkte dieser Trasse sich befindet, für welchen somit der Ausdruck Z_1 nicht verschwindet, so können wir ohne Anstand aus (27) die Werthe von $y_1, y_2, y_3 \dots$ bestimmen. Soll nun für ein mässiges Increment Δx der Punkt $(x + \Delta x + i(y + \Delta y))$ in der secundären Trasse sich befinden, so erhalten wir zur Bestimmung von Δy folgende Relation:

$$\Delta y = y_1 \Delta x + y_2 \Delta x^2 + y_3 \Delta x^3 + y_4 \Delta x^4 + \dots \quad (28)$$

Bestimmt man dann aus den Gleichungen

$$\rho \cos \mu = \Delta x, \quad \rho \sin \mu = \Delta y$$

die Werthe von ρ und μ , so wird man in den Stand gesetzt, mittelst der Relation

$$\dot{Z}_0 = Z_0 + \sigma_1 \rho \cos(\mu + \alpha_1) + \sigma_2 \rho^2 \cos(2\mu + \alpha_2) + \dots \quad (29)$$

den Werth von $\dot{Z}_0$ zu berechnen, um zu sehen, wie weit man sich, den Curvenzweig verfolgend, der Ebene xoy und somit dem Wurzelpunkt selbst genähert hat.

Aus der gepflogenen Auseinandersetzung geht zur Genüge hervor, dass man von einem beliebigen, der Gleichung $z_0 = 0$ genügenden Ausdrucke $(x + iy)$ ausgehend, auf einen Punkt des conjugirten Curvenzweiges kommt, von welchem aus diese Curve entweder unmittelbar nach einem Wurzelpunkt zustrebt, oder (30) unter gewissen Bedingungen zu solchen Orten der primären Hilfsfläche leitet, von denen mehr Curvenzweige gleichzeitig ausgehen, ihren Verlauf gegen die Ebene xoy hin nehmen, und mindestens zu eben so vielen Wurzelpunkten hinzielen.

§. 3.

Über die horizontale Einschliessung der Wurzelpunkte.

Sei p_r ein r facher Wurzelpunkt durch den Ausdruck $x + iy$ betimmt, so müssen vor Allem die Relationen:

$$\begin{aligned} \sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \dots = \sigma_{r-1} &= 0, \\ Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = \dots = Z_{r-1} &= 0, \\ z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_{r-1} &= 0 \quad \text{stattfinden.} \end{aligned} \quad (1)$$

Zur Bestimmung der Umgebungspunkte auf der Ebene xoy könnte man den Ausdruck $(x + \rho \cos \mu) + i(y + \rho \sin \mu)$ in Verwendung nehmen, sobald man ρ und μ als die laufenden Coordinaten der Umgebungspunkte von p_r ansieht. Seien $\dot{Z}_0, \dot{z}_0$ die z -Coordinaten der Umgebungspunkte auf der primären und secundären Hilfsfläche, so findet man auf Grund der Gleichungen

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{Z}_0 &= \sigma_r \rho^r \cos(\alpha_r + r\mu) + \sigma_{r+1} \rho^{r+1} \cos(\alpha_{r+1} + (r+1)\mu) + \dots \\ \dot{z}_0 &= \sigma_r \rho^r \sin(\alpha_r + r\mu) + \sigma_{r+1} \rho^{r+1} \sin(\alpha_{r+1} + (r+1)\mu) + \dots \end{aligned}$$

für beliebiges μ und ein sehr kleines ρ die nächsten Umgebungspunkte von p_r , und man kann diesfällg bei der Bestimmung von $\dot{Z}_0$ und $\dot{z}_0$ die höheren Potenzen von ρ vernachlässigen, und, sich mit den Anfangsgliedern begnügend, schreiben:

$$(3) \quad \dot{Z}_0 = \sigma_r \rho^r \cos(\alpha_r + r\mu), \quad \dot{z}_0 = \sigma_r \rho^r \sin(\alpha_r + r\mu),$$

und hieraus ergibt sich das Umgebungsverhältniss

$$Q_\mu = \cotg(\alpha_r + r\mu) = (\dot{Z}_0 : \dot{z}_0).$$

Während μ allmählig die aufeinanderfolgenden, zwischen Null und 2π enthaltenen Werthe annimmt, durchläuft der Ausdruck $(\alpha_r + r\mu)$ allmählig Werthe, welche zwischen α_r und $(\alpha_r + 2r\pi)$ enthalten sind. So oft der Ausdruck $(\alpha_r + r\mu)$ während seiner allmählichen Zunahme durch die Endpunkte des 1ten, 3ten, 5ten, $(4r-3)$ ten, $(4r-1)$ ten Quadranten hindurchgehend, aus dem Bereiche eines ungeraden in den Bereich eines geraden Quadranten hinübertritt, geht der zugehörige Werth von Q_μ aus dem positiven Zustande durch Null in den negativen Zustand über.

(4) Den so aufgefassten Übergangszustand könnten wir symbolisch durch $\{+0-1\}$ kennzeichnen und mit dem Namen *positive Mutation* belegen. In gleicher Weise mag das Symbol $\{-0+1\}$ aufgefasst werden, und mit dem Namen *negative Mutation* belegt werden. Bezeichnet man die positiven Mutationen in Bezug auf ihre Anzahl mit positiven Zahlen — und mit negativen Zahlen die Anzahl negativer Mutationen — so soll von nun an unter der Anzahl der Mutationen im generellen Sinne diejenige positive oder negative Zahl verstanden werden, welche aus der algebraischen Summirung dieser beiden Anzahlen hervorgeht. Ist etwa die Anzahl der positiven Mutationen = 8, und die Anzahl der negativen = -12, so erhält man diesfällg:

$$(5) \quad \text{Anzahl der Mutationen} = 8 + (-12) = -4.$$

Auf Grund des in (4) Gesagten können wir behaupten, dass das Umgebungsverhältniss Q_μ die positive Mutation 2mal darbieten muss, sobald μ bloss im fortschreitenden Sinne allmählig die Werthe von Null bis 2π durchläuft. Da aber der allmähliche Übergang von einem μ -Werthe zum folgenden nächst grösseren μ -Werthe als gleichbedeutend angesehen werden kann mit dem Übergange von einem Punkte zum nächstfolgenden Punkte der Umgebungscurve des vorliegenden r -fachen Wurzelpunktes p_r , so lässt sich auf Grund des Vorangehenden auch Folgendes aussagen:

Benützt man zur Auswerthung des Verhältnisses $Q_\mu = \dot{Z}_0 : \dot{z}_0$ nach und nach alle Punkte, welche der nächsten Umgebungscurve eines r -fachen Wurzelpunktes angehören, so erhält man:

$$(6) \quad \text{Anzahl der Mutationen} = 2r.$$

Es ist eigentlich für $\dot{x} = x + \rho \cos \mu$, $\dot{y} = y + \rho \sin \mu$, $\frac{d}{dx} \dot{y} = \dot{D}$,

$$(7) \quad Q_\mu = Q'_{xy} = \frac{f(\dot{x}) \cos \dot{D} - \varphi(\dot{x}) \sin \dot{D}}{f(\dot{x}) \sin \dot{D} + \varphi(\dot{x}) \cos \dot{D}};$$

Es bleibt jedoch an der Sache gar nichts geändert, wenn man in (7) die Striche durchgehends weglässt und dabei bemerkt, dass zur Bestimmung von $Q_{x,y}$ nur diejenigen Werthe von x und y zu verwenden sind, welche den in der Umgebungscurve liegenden Punkten zur Bestimmung dienen. Auch ist im Vorangehenden (8) stillschweigend vorausgesetzt, dass kein Punkt der Umgebungscurve gleichzeitig ein Wurzelpunkt sein darf.

Die Richtung der Punktfolge in der Umgebungscurve, welche beobachtet werden muss bei der successiven Ausmittlung der jeweiligen Grösse von $Q_{x,y}$, ist der Erzeugung des im Zunehmen begriffenen Winkels μ zufolge in demjenigen Sinne zu veranstalten, in welchem sich ein positives Stück der Axe ox um die z -Axe zu drehen hat, um nach Zurücklegung eines Quadranten in die Richtung der positiven Halbaxe oy zu gelangen. Würde man jedoch diese Umgebungscurve nicht in dem eben beschriebenen, sondern im entgegengesetzten Sinne verwenden, um die Aufeinanderfolge der Werthe von $Q_{x,y}$ zu ermitteln, so müsste man in diesem Falle zu $2r$ negativen Mutationen, d. h. zu $-2r$ Mutationen gelangen. (9)

Die Umgebungscurve lässt sich trotz des sehr kleinen ρ auch in einer solchen Gestaltung denken, dass man beim fortschreitenden Durchlaufen ihres Bogens in einigen Partien ihres Umfanges die entsprechenden Partien des μ -Winkels im rückschreitenden Sinne erzeugen muss. In diesem Falle wolle man nur bedenken, dass dem durchlaufenen Totalumfange der Umgebungscurve der erzeugte μ -Werth die Grösse 2π erreichen muss, — dass demgemäss die einmal im retrograden Sinne erzeugten Partien des μ -Winkels ein zweimaliges Erzeugen derselben μ -Partien im fortschreitenden Sinne bedingen, — dass dann in weiterer Consequenz auf eine in diesen Partien sich ergebende Anzahl von etwa 5 negativen Mutationen eine Anzahl von $2 \times 5 = 10$ Mutationen (positiven Mutationen) nothwendig erfolgen muss; — und man wird schliesslich zugeben müssen, dass auch für solche Partien des μ -Winkels die regelrechte Anzahl der Mutationen in der Zahl 5 sich ergeben muss. (10)

Man kann demgemäss im generellen Sinne folgenden Satz aussprechen:

Bei beliebiger Form der Umgebungscurve eines r -fachen Wurzelpunktes liefert das Umgebungsverhältniss $Q_{x,y}$ $2r$ Mutationen. (11)

Denken wir uns jetzt eine beliebig ausgedehnte geschlossene Curve in xoy , welche weder an ihrem Umfange, noch in dem von derselben eingeschlossenen Raum einen Wurzelpunkt beherbergt, so lässt sich (12) erweisen, dass $Q_{x,y}$ in Bezug auf die Punktfolge in dieser Curve die Nulle als Anzahl der Mutationen bieten muss.

Eine derartig angenommene Curve sei hu . Diese möge theils durch primäre mit pp' , theils durch secundäre mit ss' angedeutete Trassenzweige durchfurcht sein. Vor Allem ist es klar, dass innerhalb dieser Curve keine Begegnung zwischen (13) verschiedenartigen Trassenzweigen erfolgen darf, weil der Hypothese zuwider ein jeder dieser Begegnungspunkte einen Wurzelpunkt abgeben müsste.

Zwischen je zwei mit pp' und ss' angedeutete Trassenzweige können wir uns einen Linienzug wie $m_1 m_1'$, $m_2 m_2'$ verzeichnen, in deren Verlaufe kein Punkt vorhanden sein kann, für welchen irgend eine von den Grössen verschwindet. Dies sind somit Linien, in deren Verlauf $Q_{x,y}$ keine Mutation zu liefern vermag.

Der Totalumfang der Figur (13) lässt sich durch Einschaltung solcher in Bezug auf Mutationen indifferenter Züge in continuirlicher Form aus folgenden Partialzügen zusammensetzen:

$$m_1' p' h p m_1 m_1'; m_1' m_1 s s m_2 m_2'; m_2' m_2 p p u p' p' m_2'; m_2' s' s' m_1' \quad (14)$$

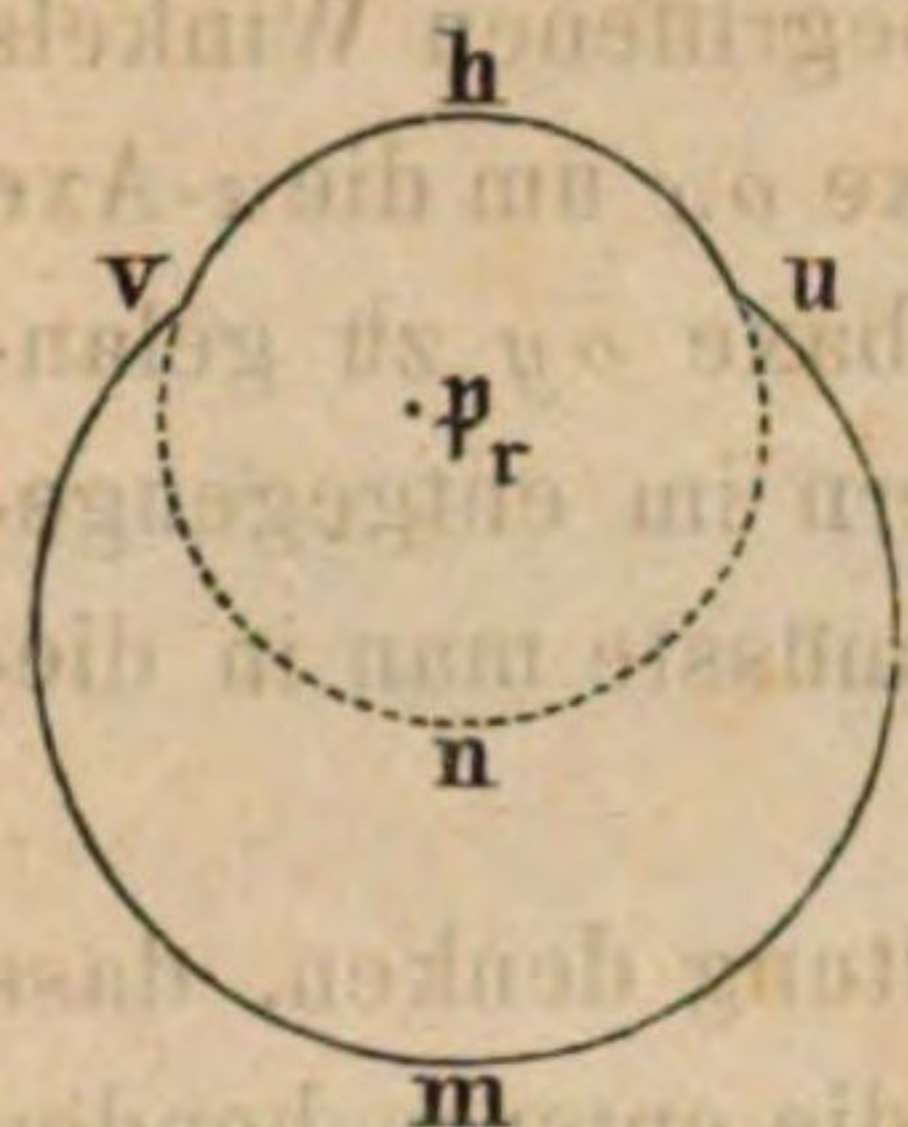
Der erste Linienzug ist ein geschlossener und bringt bei constantem Vorzeichen von z_0 bloss in den zwei mit p bezeichneten Punkten das Z_0 zum Verschwinden, liefert somit keine Mutation.

Der zweite Zug mit dem vierten in Verbindung ist ebenfalls ein geschlossener, enthält keine mit p bezeichneten Punkte an seinem Umfange, bietet somit auch keine Mutation.

Aus demselben Grunde, wie der erste, bietet auch der dritte Zug keine Mutation.

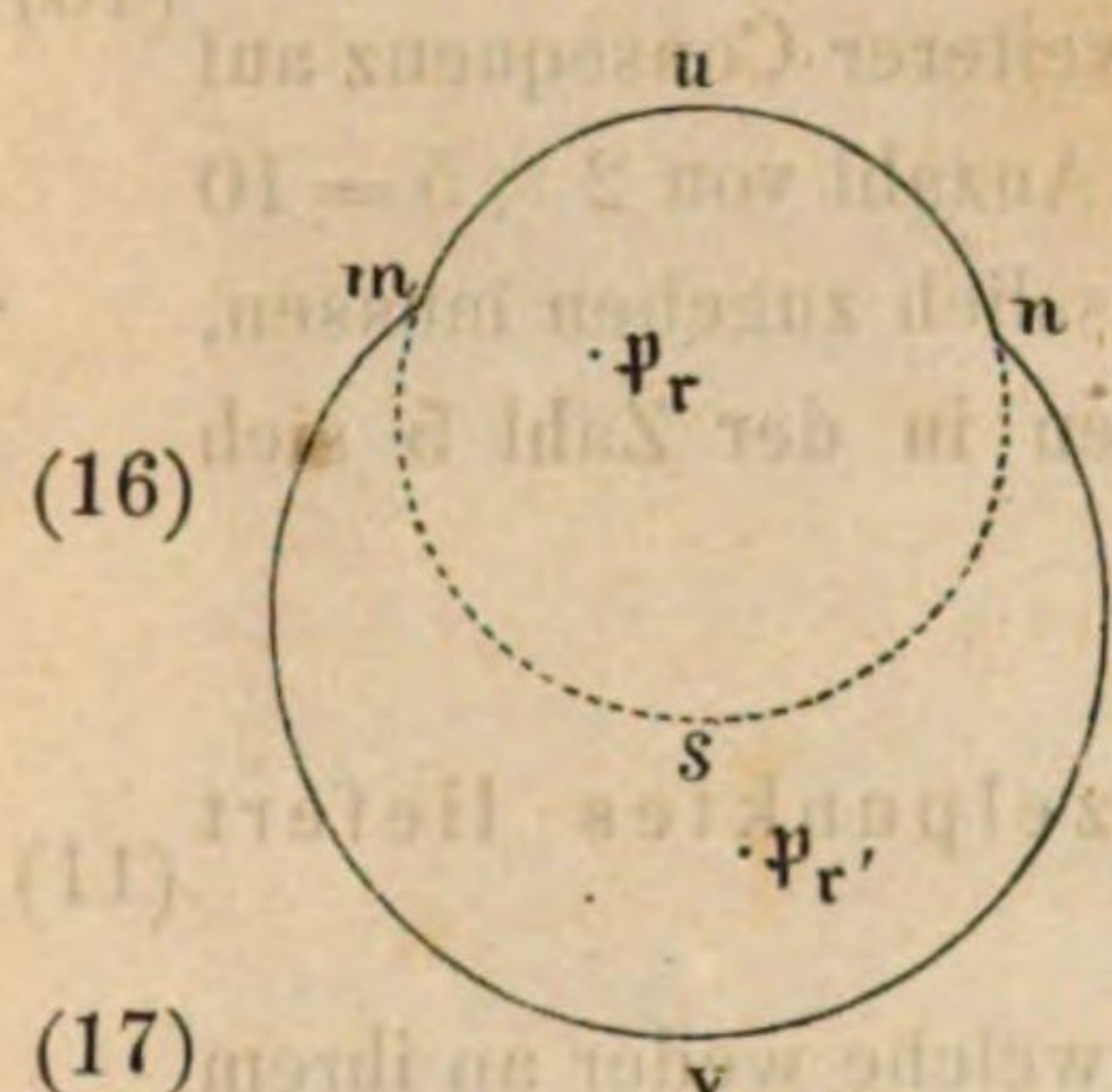
Da nun ein ähnlicher Vorgang sich bei einer jeden derartig angenommenen Curve denken lassen wird, so ist im Vorliegenden der in (12) angekündigte Satz dargethan.

(15) Die Linienzüge $L_1 = uhvnu$, $L_2 = unvmu$, von denen der erste den r -fachen Wurzelpunkt p_r , und der zweite keinen Wurzelpunkt beherbergt, lassen sich in einen einzigen Linienzug $L = uhvnuunvmu = uhvmu$ zusammensetzen. Der erste liefert $2r$, der zweite hingegen Null als Anzahl der Mutationen. Der zusammengesetzte Zug L , bei welchem sich die Züge vnu und unv in Bezug auf die Anzahl der Mutationen tilgen, liefert offenbar auch $2r$ als Anzahl der Mutationen.



Es lässt sich somit die Umgebungslinie eines Wurzelpunktes beliebig erweitern ohne die Anzahl der Mutationen zu beirren, wofern nur in dem hinzugekommenen Raum und Umfang keine neuen Wurzelpunkte zu liegen kommen.

Ist p_r ein r -facher, und $p_{r'}$ ein r' -facher Wurzelpunkt, so wird der Zug $L_1 = numsn$ die Zahl $2r$, und der Zug $L_2 = nsmvn$ die Zahl $2r'$ als Anzahl der Mutationen bieten. Aus L_1 und L_2 lässt sich durch Weglassung der sich tilgenden Züge nsm und msn der Linienzug $L = numvn$ zusammensetzen, welcher somit die Zahl $2(r + r')$ als Anzahl der Mutationen liefern muss.



(16) Diese Betrachtung lässt sich auf eine beliebige Anzahl zerstreuter Wurzelpunkte ausdehnen und führt zum folgenden Satz:

(17) Enthält eine wie immer gestaltete Umgebungslinie an ihrem Umfange keinen Wurzelpunkt, und im Bereiche des von ihr eingeschlossenen Raumes die durch angehängte Zeiger zu deutenden vielfachen Wurzelpunkte $p_r, p_{r'}, p_{r''}, p_{r'''} \dots$, so wird sie in Bezug auf das Umgebungsverhältniss $Q_{x,y}$ die Zahl $2(r + r' + r'' + r''' + \dots)$ als Anzahl der Mutationen bieten.

(18) Oder: Eine angenommene Umgebungslinie veranlasst in $Q_{x,y}$ eine doppelt so grosse Anzahl von Mutationen, als die Anzahl der innerhalb derselben eingeschlossenen Wurzelpunkte beträgt.

Die Umkehrung des Satzes ist offenbar gestattet und spricht sich im Folgenden aus:

(19) Bietet der Ausdruck $Q_{x,y}$ in Bezug auf eine angenommene Umgebungslinie eine gewisse Anzahl von Mutationen, so sind im Bereiche des von ihr eingeschlossenen Raumes die Hälfte so viel Wurzelpunkte angedeutet.

Ist $x + iy$ kein Wurzelpunkt der Gleichung; ist ferner $\dot{x} = x + \rho \cos \mu$, $\dot{y} = y + \rho \sin \mu$ und bei beliebigem μ , $\rho = \infty$, so stellt die aus dem veränderlichen Ausdrücke $\dot{x} + i\dot{y}$ hervorgehende Punktfolge einen aus dem Centrum $x + iy$ mit einem unendlich langen Radius $= \rho$ beschriebenen Kreisumfang vor, innerhalb dessen ganz gewiss die sämtlichen der gegebenen Gleichung angehörigen Wurzelpunkte zu liegen kommen. Bei der Bildung des Ausdruckes Q'_{xy} ist es bei $\rho = \infty$ nur nöthig in seinem Zähler und Nenner bloss Glieder mit der n ten Potenz von ρ beizubehalten, sobald die Gleichung vom n ten Grade vorausgesetzt wird, und man erhält

$$(20) \quad Q'_{xy} = \frac{\sigma_n \rho^n \cos(\alpha_n + n\mu)}{\sigma_n \rho^n \sin(\alpha_n + n\mu)} = \cotg(\alpha_n + n\mu).$$

(21) Für alle möglichen, zwischen Null und 2π liegenden μ -Werthe wird Q'_{xy} ganz gewiss die Zahl $2n$ als Anzahl der Mutationen bieten, und hiemit besagen, dass im Bereiche der unendlichen Kreisfläche, d. h. im Bereiche der Ebene xoy n Wurzelpunkte der Gleichung angedeutet sind. (Dies wäre ein zweiter Beleg für den in §. 1 ausgesprochenen Satz.)

Denken wir uns zwei Werthe von μ , etwa μ_1 und μ_2 , von der Beschaffenheit, dass infolge derselben die Relation $(\alpha_n + n\mu_2) - (\alpha_n + n\mu_1) = \pi$ erfüllt wird, so erhalten wir

$$\mu_2 - \mu_1 = \frac{\pi}{n}. \quad (22)$$

Von den Ausdrücken $(\alpha_n + n\mu_1)$ und $(\alpha_n + n\mu_2)$ bildet entweder keiner ein Vielfaches eines Quadranten, oder sie bilden gleichzeitig ein gerades, oder gleichzeitig ein ungerades Vielfache eines Quadranten. Wenn nun μ_1 die Stelle einer positiven Mutation für Q_{xy} andeutet, so muss dies auch bei μ_2 der Fall sein.

Demgemäss erscheinen die $2n$ möglichen Stellen der positiven (23)

Mutationen auf der unendlich grossen Kreisperipherie so vertheilt, dass je zwei den Nachbarpunkten dieser Art angehörigen

Kreisradien den constanten Winkel $\frac{\pi}{n}$ einschliessen.

Ein jeder Durchmesser dieses Kreises, d. h. eine jede unbegrenzt gedachte, durch einen beliebigen Punkt $x + iy$ gelegte Gerade theilt die erwähnte Kreisperipherie in zwei Hälften ab, deren jede durch ihre Punktfolge im Ausdrucke Q_{xy} die (24) positive Mutation n -mal veranlasst. Wie aber schon erwähnt wurde, darf die Durchmessergerade keinen Wurzelpunkt in sich bergen.

Sei nun in (25) im verjüngten Massstabe ein solcher Kreis dargestellt, p sei der dem Ausdrucke $x + iy$ entsprechende Punkt, und ww' der ins Auge gefasste Diameter, welcher durch seine Punktfolge in Q_{xy} die (25) Zahl ν als Anzahl der Mutationen veranlasst.

Sind in der einen Kreishälfte m , in der andern m' Wurzelpunkte angedeutet, so findet man, da auf jede Peripheriehälfte n Mutationspunkte fallen:

$$n + \nu = 2m, \quad -\nu + n = 2m', \quad \text{hieraus}$$

$$m = \frac{1}{2}(n + \nu); \quad m' = \frac{1}{2}(n - \nu), \quad \nu = m - m' \quad (26)$$

wobei selbstverständlich die Gerade ww' in ihrer ganzen Ausdehnung zur Bestimmung von ν zu verwenden sein wird.

Seien die Geraden L_1/L_2 so beschaffen, dass die betreffenden Punktfolgen in Q_{xy} die Zahlen ν_1, ν_2 als Anzahl der Mutationen veranlassen, so erhält man

$$(L_1 \dots L_2) = \frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1) \quad (27)$$

sobald das Symbol $(L_1 \dots L_2)$ zur Bezeichnung der Anzahl von Wurzeln dient, welche auf dem zwischen L_1 und L_2 enthaltenen Streifen ihre Wurzelpunkte haben.

Um die Anwendung der in diesem §. gewonnenen Sätze (12) (19) (26) (27) so bequem als möglich zu machen, theile man die um den Axenursprung herumliegenden Partien der Ebene oxy nach Belieben in grössere oder kleinere Rechtecke ab, deren Seiten beziehungsweise zu den Axen ox, oy parallel liegen. Jedes dieser Rechtecke kann man als eine Umgebungslinie von Wurzelpunkten ansehen und behufs der Ermittlung der Anzahl der innerhalb dieses Rechteckes angedeuteten Wurzeln untersuchen, wie gross die Hälfte der Anzahl der Mutationen sei, welche die Punktfolge am Umfang des in Betracht gezogenen Rechteckes in Bezug auf Q_{xy} bietet. Hierbei tritt der besonders günstige Umstand ein, dass die Untersuchung bezüglich der Punktfolge der einzelnen Seiten des aufgenommenen Rechteckes sich bloss auf eine der Variablen bezieht, weil bei jeder der vier Umfangslinien von den Coordinaten x, y immer eine constant sich ergibt. (28)

Seien für $a' > a$, $b' > b$ etwa $x = a$, $x = a'$; $y = b$, $y = b'$ die Gleichungen der vier Geraden, in denen die Seiten des zu untersuchenden Rechteckes enthalten sind, so kommt es darauf an: den Ausdruck $Q_{a'y}$ von $y = b'$ bis $y = b$; den Ausdruck Q_{xb} von $x = a'$ bis $x = a$; den Ausdruck Q_{ay} von $y = b$ bis $y = b'$; und endlich den Ausdruck $Q_{xb'}$ von $x = a$ bis $x = a'$ zu untersuchen, in jedem dieser Fälle die Anzahl der Mutationen anzugeben, um schliesslich aus der Hälfte des Gesamtbetrages der Anzahlen der Mutationen die Anzahl der im betreffenden Rechtecke angedeuteten Wurzeln zu erfahren. Die mit Q bezeichneten Ausdrücke lassen sich diesfällg in folgenden Formen darstellen:

$$(29) \quad \begin{aligned} Q_{ay} &= \frac{A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \dots}{A'_0 + A'_1 y + A'_2 y^2 + \dots} \\ Q_{xb} &= \frac{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots}{B'_0 + B'_1 x + B'_2 x^2 + \dots} \end{aligned}$$

in welchem die mit A bezeichneten Coëfficienten aus der constanten Coordinate $x = a$, und die mit B bezeichneten aus der constanten Coordinate $y = b$ berechnet werden.

(30) In jedem dieser Fälle (29) kommt es darauf an, in der Zählerfunction innerhalb der angedeuteten Grenzen die möglichst kurzen Partialintervalle zu bestimmen, in welchen die einzelnen primären Werthe der Variablen liegen, welche dem Zähler den Nullwerth ertheilen, dergestalt, dass innerhalb eines solchen Partialintervalles die Nennerfunction nicht verschwindet und somit ein constantes Vorzeichen beurkundet. Die aus jedem solchen Intervall unmittelbar hervorgehende Mutation wird eine positive oder eine negative sein, je nachdem das constante Vorzeichen des Nenners mit dem Vorzeichen des Zählers im Vororte seines Verschwindens übereinstimmt oder nicht.

Sind die in (27) erwähnten Geraden L_1 , L_2 durch die Gleichungen $x = a_1$, $x = a_2$ dargestellt, so hat man es mit den Ausdrücken $Q_{a_1 y}$ und $Q_{a_2 y}$ zwischen den Grenzen $y = -\infty$ bis $y = \infty$ zu thun, um die betreffenden Mutationsanzahlen ν_1 und ν_2 zu bestimmen.

Bisweilen ist es vortheilhafter, statt Q_{xy} den Ausdruck $-(Q_{xy})^{-1}$ in Bezug auf die Mutationsanzahl zu consultiren und dies besonders in denjenigen Fällen, wo der Zähler von Q_{xy} in Bezug auf die in Betracht gezogene Variable einen höheren Grad beurkundet als der Nenner. Es ist nämlich

$$(31) \quad -\frac{1}{Q_{xy}} = \tan(\alpha_r + r\mu)$$

ein Ausdruck, welcher bei Übergängen des Bogens $(\alpha_r + r\mu)$ aus dem Bereiche eines geraden Quadranten in den Bereich eines ungeraden, gerade so, wie der Ausdruck Q_{xy} 2r Mutationen darbieten wird.

(32) Das sub (30) angegebene Verfahren zur Ausmittlung der Mutationsanzahlen von Q_{ay} , Q_{xb} werden wir in einem der späteren Paragraphe sowohl durch Rechnung, als auch durch Construction durchzuführen lehren. Hier möge noch eine dem Mathematiker Sturm nachgebildete Methode zum Vortrag kommen, welche einerseits sich durch die Einfachheit der ihr zu Grunde liegenden Theorie, andererseits in diesem Falle sich besonders dadurch empfiehlt, dass man mit ihrer Anwendung die Mutationsanzahl anzugeben vermag, ohne nach den wirklichen Stellen zu fragen, an welchen Q_{ay} , Q_{xb} durch Null hindurchgeht.

Zwei Functionen bilden für solche Werthe der ihnen zu Grunde liegenden Variablen einen Zeichenwechsel (Variation), für welche die entsprechenden Functionswerthe entgegengesetzt bezeichnet erscheinen.

(33) Zwei Functionen bilden für solche Werthe ihrer Variablen eine Zeichenfolge (Zeichenpermanenz), für welche die entsprechenden Functionswerthe gleichbezeichnet sich ergeben.

Bei einer Reihe von mehreren, etwa $(m+1)$ Functionen könnte man bei jedem der m möglichen Paare von Nachbarfunctionen angeben, ob sie bei gegebenem Werthe ihrer Variablen den Zustand eines Zeichenwechsels oder den einer Zeichenfolge aufweisen. Findet man hiebei α Zeichenwechsel und β Zeichenfolgen,

so muss offenbar die Gleichheit $\alpha + \beta = m$ zutreffen. Ergeben diese $(m+1)$ Functionen beim Übergange von einem Werthe der Variablen zu einem anderen einen Gewinn an Zeichenwechseln, so muss nothwendiger Weise ein eben so grosser Abgang an Zeichenfolgen sich kundgeben, und umgekehrt.

Die Durchgangsstelle von Q_{xb} , Q_{ay} durch eine positive Mutationsstelle ist in Bezug auf das Functions-paar Z_0, z_0 diejenige Stelle, wo die Zeichenfolge dieses Functionspaares in einen Zeichenwechsel übergeht. (34)

An den Stellen, wo die Ausdrücke Q_{ay} , Q_{xb} eine positive Mutation aufweisen, geht der Zeichenwechsel des Functionspaares Z_0, z_0 in eine Zeichenfolge über.

Denke man sich eine Reihe von Functionen:

$$Z_0, z_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_{r-1}, \delta_r \quad (35)$$

von der Beschaffenheit, dass die denselben im Beginne eines Intervalls zukommenden Anzahlen von Zeichenwechseln und Zeichenfolgen nur an denjenigen Stellen eine Änderung erfahren, an welchen Z_0 durch Null hindurchgeht, also nur an Stellen je um eine Einheit sich ändern, wo die dem Functions-paar (Z_0, z_0) entsprechende Zeichengruppe einen Übergang von Zeichenwechsel zur Zeichenfolge, oder von Zeichenfolge zum Zeichenwechsel beurkundet. Einer solchen Functionsreihe könnten wir uns dazu bedienen, um in dem ihr jeweilig angehörigen Zeichencomplex die im Verlaufe des Intervalls beim Paare (Z_0, z_0) nach und nach auftauchenden Zeichenwechsel oder Zeichenfolgen aufzuspeichern, und dann am Schlusse des Intervalls den Gesamtgewinn oder Gesamtverlust an Zeichenwechseln zu erfahren, und denselben beziehungsweise durch eine positive oder negative Zahl δ auszudrücken. Die Zahl δ ist der Unterschied, welchen man erhält, wenn man von der Anzahl Stellen, an welchen (Z_0, z_0) einen Übergang von Zeichenfolge zum Zeichenwechsel beurkundet, die Anzahl derjenigen Stellen subtrahirt, an welchen dieses Functions-paar einen Übergang vom Zeichenwechsel zur Zeichenfolge darbietet. Der in (34) angeführten Aussage gemäss erhält man (36) auch δ , wenn man in Bezug auf das angenommene Intervall von der dem Q_{xy} zukommenden Anzahl positiver Mutationen die Anzahl der diesem Ausdrucke in demselben Intervall angehörigen negativen Mutationen subtrahirt. Eine in dieser Weise aufgefasste Zahl δ stellt somit ganz genau die Anzahl der im anberaumten Intervall stattfindenden Mutationsanzahl vor, wie solche bereits sub (4) und (5) zur Sprache gebracht wurde.

Im Sinne Sturm's vorgehend, erhält man die zum vorgelegten Functions-paar (Z_0, z_0) erforderliche übrige Reihe $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_{r-1}, \delta_r$ als eine Reihe von aufeinander folgenden Resten, welche zum Vorschein kommen, wenn man in Bezug auf (Z_0, z_0) dasjenige Verfahren beobachtet, welches behufs der Auffindung ihres grössten gemeinschaftlichen Maasses vorgeschrieben ist, mit der einzigen Nebenbemerkung, dass man den jeweilig gefundenen Rest vorerst entgegengesetzt zu nehmen hat, bevor man denselben bei der fortgesetzten Operation als den nächstfolgenden Divisor verwendet.

Dem eben Gesagten gemäss muss die auf diese Weise hervorgehende Functionsreihe folgenden Relationen genügen:

$$\begin{aligned} Z_0 &= q_0 z_0 - \delta_1 \\ z_0 &= q_1 \delta_1 - \delta_2 \\ \delta_1 &= q_2 \delta_2 - \delta_3 \\ &\vdots \\ \delta_{r-2} &= q_{r-1} \delta_{r-1} - \delta_r \end{aligned} \quad (37)$$

wobei die Operation des successiven Dividirens so weit fortgesetzt gedacht wird, bis man auf einen von der Variablen unabhängigen und von Null verschiedenen Rest δ_r kommt. Dies gelingt uns jedesmal, sobald die in Betracht gezogene Umgebungslinie keinen Wurzelpunkt in ihrem Umfange beherbergt. (38)

Ein gleichzeitiges Verschwinden eines Paares von Nachbarfunctionen aus der Reihe (35), etwa des Paares (δ_2, δ_3) ist unstatthaft, weil zufolge der dritten und vierten Relation in (37) wegen $\delta_2 = \delta_3 = 0$

(39) auch β_1 und β_4 verschwinden müsste. Der Zustand des gleichzeitigen Verschwindens eines Paares müsste sich demgemäss auf das vorhergehende Paar (β_1, β_2) und auch auf das nächstfolgende Paar (β_3, β_4) vererben und schliesslich das gleichzeitige Verschwinden von Z_0 und z_0 und β_r im Gegensatze zu (38) bewirken.

(40) Bringt ein Werth der Variablen eine der mittleren Functionen aus (35), etwa β_s , zum Verschwinden, so drückt er vermöge (37) den Nachbarfunctionen β_{s-1} und β_{s+1} gleiche und entgegengesetzte Werthe auf.

Die Function β_s erhält zwar unmittelbar vor und nach dem Verschwinden entgegengesetzte Vorzeichen, liefert jedoch, mit beliebigem Vorzeichen genommen, in Bezug auf die entgegengesetzten Vorzeichen der Nachbarfunctionen β_{s-1} , β_{s+1} jedesmal nur Einen Zeichenwechsel und Eine Zeichenfolge.

(41) Die Anzahl der einer Functionsreihe (35) angehörigen Zeichenwechsel und Zeichenfolgen wird nicht geändert, so lange keine dieser Functionen durch Null hindurchgeht, aber zufolge (41) auch dann nicht, wenn bloss Eine oder auch mehrere der intermediären Functionen in (35) durch Null hindurchgehen.

So oft aber Z_0 durch Null hindurchgeht, vermehrt sich jedesmal die Anzahl der bestehenden Zeichenwechsel um eine Einheit, oder nimmt um eine Einheit ab, je nachdem der Ausdruck Q_{xb} vel Q_{ay} an dieser Stelle eine positive oder negative Mutation beurkundet.

Aus dieser Darstellung ist genügend zu ersehen, dass die nach Sturm construirte Functionsreihe alle erwünschten und in (36) angedeuteten Eigenschaften aufweist und demgemäss zur Auffindung der Mutationsanzahl für Q_{xb} , Q_{ay} sich vollkommen eignet.

Um also die Anzahl der Mutationen in Bezug auf Q_{xb} im Intervall $(x = a_1 \text{ bis } x = a_2)$ zu bestimmen, verfährt man also:

(44) Man construirt nach (37) die Functionsreihe $Z_0, z_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$; berechnet ihre Werthe für $x = a_2$ und erhält aus der sich ergebenden Zeichenreihe etwa μ_2 Zeichenwechsel; dann führe man in den Functionen die Substitution $x = a_1$ durch, und erhält aus der hieraus resultirenden Zeichenreihe etwa μ_1 Zeichenwechsel, schliesslich findet man für Q_{xb} im anberaumten Intervall

(45) Anzahl der Mutationen für $Q_{xb} = \mu_2 - \mu_1$.

Im Falle $a_1 = -\infty$, $a_2 = \infty$ ist die Ausmittlung der Anzahl der Mutationen höchst einfach, weil hiebei in einer jeden Function bloss ein einziges, und zwar das mit der höchsten Potenz von x begabte Glied zu berücksichtigen ist.

Einer besonderen Erwähnung verdient der Fall, wo in Q_{xb} der Neuner eine derivirte Function des mit lauter primären Coëfficienten begabten Zählers ist. In diesem Falle hat man:

$$(47) \quad Q_{xb} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1} = \frac{f(x)}{f_1(x)}.$$

Ist a eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ und ρ sehr klein, so erhält man:

$$(48) \quad \frac{f(a+\rho)}{f_1(a+\rho)} = \frac{f(a) + \rho f_1(a)}{f_1(a) + \rho f_2(a)} = \frac{\rho f_1(a)}{f_1(a)} = \rho, \text{ hiemit}$$

$$Q_{xb} \Big|_{x=a+\rho} = \frac{f(a+\rho)}{f_1(a+\rho)} = \rho.$$

Hieraus ersieht man, dass Q_{xb} vor jedesmaligem Verschwinden sich negativ, und unmittelbar nach dem Verschwinden positiv gestalten muss, weil der erste Zustand aus einem negativen, der letztere aus einem positiven ρ hervorgeht. Der Ausdruck Q_{xb} bietet diesfällig in jedem beliebig angenommenen Intervall lauter negative, etwa μ Mutationen, und $-\mu$ ist dann die verlangte Anzahl der Mutationen.

In diesem Falle bilde man sich nach (37) die Functionsreihe

$$(49) \quad f(x), f_1(x), \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r,$$

substituieren in dieser Reihe durchgehends $x = a_2$, und erhält wie oben etwa μ_2 Zeichenwechsel; dann findet man entsprechend der Substitution $x = a_1$ etwa μ_1 Zeichenwechsel, und hat schliesslich:

$$\text{Anzahl der Mutationen} = \mu_2 - \mu_1 = -(\mu_1 - \mu_2). \quad (50)$$

Hiebei ist jedoch die Bedingung festzuhalten, dass $f(x)$ und $f_1(x)$ im angenommenen Intervall nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, dass somit die Gleichung $f(x) = 0$ im gegebenen Intervall keine wiederholten primären Wurzeln besitzen darf. Auch ist es leicht zu ersehen, dass die in (49) erhaltene Zahl geradezu die Anzahl Stellen andeutet, in welchen der Zähler $f(x)$ durch Null hindurchgeht, dass also $(\mu_1 - \mu_2)$ auf die Anzahl der primären Wurzeln hinweist, welche im angenommenen Intervall enthalten sind und der Gleichung $f(x) = 0$ angehören.

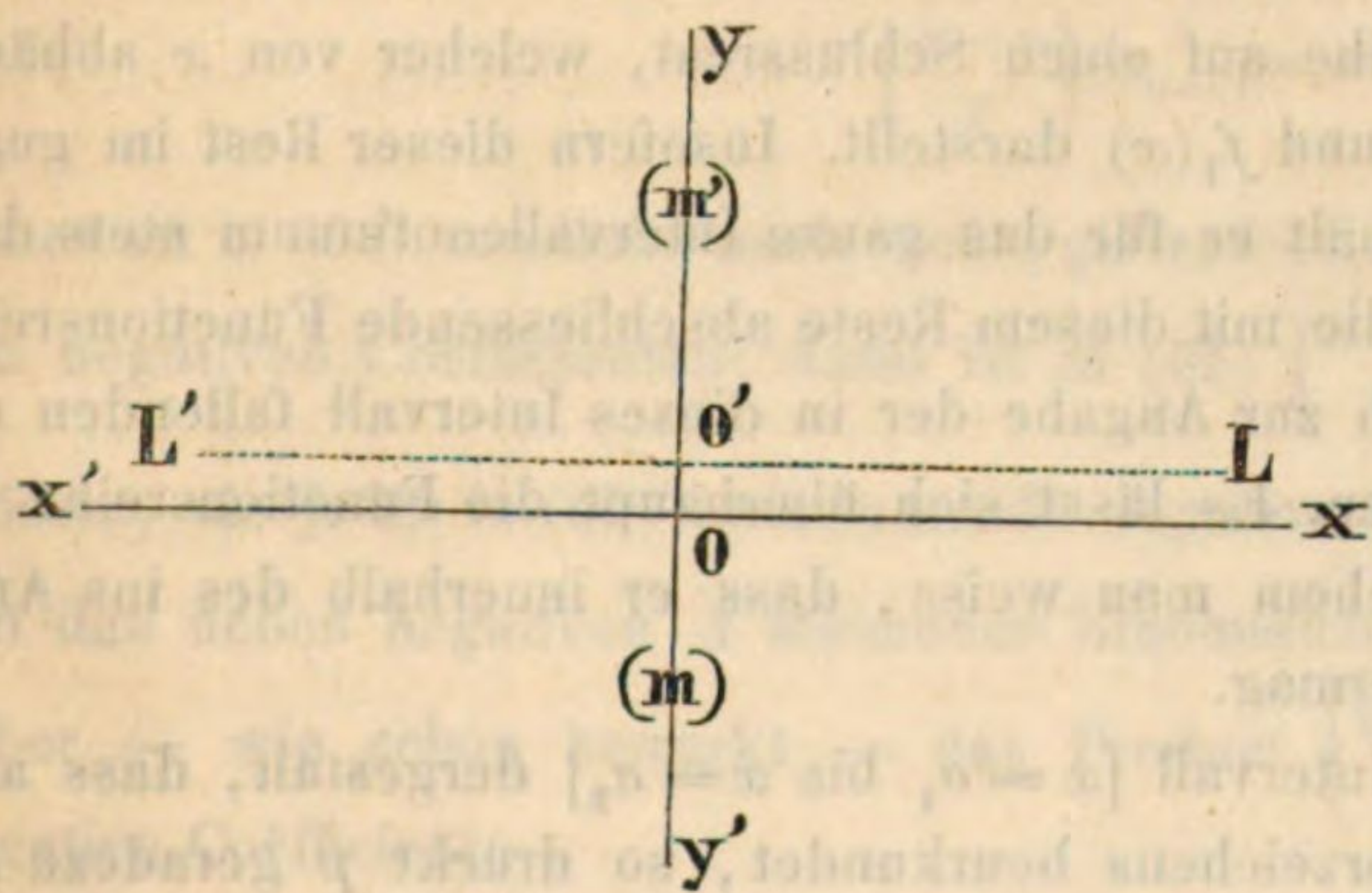
Aus (48) sieht man, dass an jeder Stelle des Intervalls, wo der Zähler $f(x)$ verschwindet, im Vororte des Verschwindens Zähler und Nenner verschieden bezeichnet, und unmittelbar nach dem Verschwinden gleichbezeichnet erscheinen müssen, dass also beim Übergange durch eine solche Stelle im Bereiche der Functionsreihe jedesmal eine Zeichenfolge gewonnen wird. Hieraus ist klar, dass gleichwie der Zähler beim Übergange von irgend einem Vororte seines Verschwindens zum nächstfolgenden Vororte dieser Art sein Vorzeichen wechselt, dass auch der Nenner $f_1(x)$ innerhalb derselben Vororte, somit auch innerhalb der Verschwindungsstellen selbst sein Vorzeichen ändern muss. Hieraus folgt, dass innerhalb zweier einander nächsten Verschwindungsstellen von $f(x)$ sich je eine ungerade Anzahl Verschwindungsstellen von $f_1(x)$ ergeben muss. Es lässt sich schliesslich behaupten, dass zwischen unmittelbar auf einander folgenden, primären der Gleichung $f(x) = 0$ angehörigen Wurzeln a und b , je eine ungerade Anzahl primärer Zahlen enthalten sein müsse, welche der Gleichung $f_1(x) = 0$ angehören.

Um diesen Fall ins helle Licht zu setzen, sei

$$f(u) = 0 \quad (52)$$

eine mit primären Coefficienten begabte und dem n ten Grade angehörige Gleichung. Den dieser Gleichung entsprechenden Ausdruck Q_{xy} findet man aus

$$y \cdot Q_{xy} = \frac{f(x) - \frac{y^2}{2!}f_2(x) + \frac{y^4}{4!}f_4(x) - \dots}{f_1(x) - \frac{y^2}{3!}f_3(x) + \frac{y^4}{5!}f_5(x) - \dots} \quad (53)$$



Eine zur Axe $x'x$ parallele, neben derselben sehr nahe liegende Gerade $L'L$ hat zur Gleichung ($y = 00' = \rho$) und kann als eine solche angesehen werden, welche in ihrem Verlauf keinen der Gleichung (52) angehörigen Wurzelpunkt beherbergt. Von den eventuell möglichen, in $x'x$ liegenden wiederholten Wurzelpunkten gehen bekanntlich zwei Systeme von Hilfstassen aus, von denen das erste der primären, das zweite der secundären Fläche angehört und in xoy lagert. In der Nähe des erwähnten wiederholten Wurzelpunktes schliessen je zwei demselben Systeme angehörige Trassenzweige einen constanten Winkel ein, und sind in xoy so gelagert, dass je ein Trassenzweig des einen Systems den Winkel halbirt, welchen die Nachbarzweige des anderen Systems einschliessen. Hieraus geht hervor, dass mit Bezug auf LL' auch an solchen Stellen Zähler und Nenner in (53) nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, weil ja die Begegnungspunkte der $L'L$ mit den erwähnten Trassenzweigen in abwechselnder Aufeinanderfolge bald der primären, (54)

und sind in xoy so gelagert, dass je ein Trassenzweig des einen Systems den Winkel halbirt, welchen die Nachbarzweige des anderen Systems einschliessen. Hieraus geht hervor, dass mit Bezug auf LL' auch an solchen Stellen Zähler und Nenner in (53) nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, weil ja die Begegnungspunkte der $L'L$ mit den erwähnten Trassenzweigen in abwechselnder Aufeinanderfolge bald der primären,

bald der secundären Trasse angehören, und somit in regelmässiger Abwechslung bald den Zähler, bald den Nenner zum Verschwinden bringen.

Man könnte $00' = \rho$ eine angebbare, nicht nothwendig unendlich kleine Grösse sein lassen, insofern nicht zu besorgen ist, dass in dem Raume zwischen $L'L$ und $x'x$ irgend ein der Gleichung (52) angehöriger Wurzelpunkt sich aufhält.

Hat man sich einmal über die Wahl der Distanz ρ entschieden, so substituirt man im Ausdruck (53) für y diesen Werth und ordnet den Zähler und Nenner nach den Potenzen von x , und erhält etwa:

$$(56) \quad \rho Q_{xp} = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots}{A_0' + A_0' x + A_2' x^2 + \dots} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Die nach (31) bestimmte Functionsreihe $\varphi(x)$, $\psi(x)$, β_1 , $\beta_2 \dots \beta_r$ bietet für $x = a_1$ etwa μ_1 Zeichenwechsel, und für $x = a_2$ etwa μ_2 Zeichenwechsel.

Sind in (54) oberhalb $L'L$ m' Wurzelpunkte, und unterhalb $L'L$ m Wurzelpunkte der (52) angedeutet, so findet man vor Allem

$$(57) \quad m = m' + p$$

sobald p die Anzahl der im Intervall $(a_1 - a_2)$ befindlichen primären Wurzelpunkte, hiemit auch die Anzahl der primären der (52) angehörigen Wurzeln andeutet. Andererseits findet man nach (45)

$$(58) \quad m' - m = \mu_2 - \mu_1, \quad \text{hiemit} \quad p = \mu_1 - \mu_2.$$

In Beziehung auf das verhältnissmässig kleine ρ könnte man den Bruch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in den Formen:

$$(59) \quad \frac{f(x)}{f_1(x)}; \frac{f(x) - \frac{\rho^2}{2} f_2(x)}{f_1(x)}; \frac{f(x) - \frac{\rho^2}{2} f_2(x) + \frac{\rho^4}{24} f_4(x)}{f_1(x) - \frac{\rho^2}{6} f_3(x)}; \dots$$

darstellen, sobald man überzeugt ist, dass im angenommenen Intervall die Gleichung (52) in Bezug auf die höchstmögliche Wiederholungszahl der primären Wurzeln beziehungsweise die Zahlen 1, 2, 3 ... darbietet.

Der erste dieser Fälle — der vom Mathematiker Sturm in Anwendung gebrachte — ist nur ein specieller Fall des in (56) angedeuteten allgemeinen Verfahrens; er führt uns in den Fällen von wiederholten Wurzeln während der Bildung der nöthigen Functionsreihe auf einen Schlussrest, welcher von x abhängt und das grösste gemeinschaftliche Mass zwischen $f(x)$ und $f_1(x)$ darstellt. Insofern dieser Rest im gegebenen Intervall keine Verschwindungsstellen besitzt, behält er für das ganze Intervallcontinuum stets dasselbe Vorzeichen, und in solchen Intervallen lässt sich die mit diesem Reste abschliessende Functionsreihe zur Angabe der verlangten Mutationsanzahl, hiemit auch zur Angabe der in dieses Intervall fallenden der Gleichung (52) angehörigen primären Wurzeln verwenden. Es lässt sich überhaupt die Functionsreihe mit einem beliebigen anderen Reste abschliessen, von welchem man weiss, dass er innerhalb des ins Auge gefassten Intervalls sein Vorzeichen zu wechseln nicht vermag.

Bezieht sich die Bestimmung von p in (52) auf ein Intervall $[x = a_1 \text{ bis } x = a_2]$ dergestalt, dass ausserhalb dieses Intervalls die $f(x)$ die Stabilität ihres Vorzeichens beurkundet, so drückt p geradezu die sämmtliche Anzahl der primären Wurzeln aus, welche der (52) im Intervall $[x = -\infty \text{ bis } x = +\infty]$ angehören. Über die Bestimmung eines möglichst kurzen mit der eben bemerkten Eigenschaft versehenen Intervalls werden wir uns bald am Schlusse dieses Paragraphes beschäftigen.

In Beziehung auf (52) könnte man zum Behufe der Ausmittlung der Orte von Wurzelpunkten die Ebene xoy durch ein System von parallelen Geraden $L_1, L_2, L_3 \dots$ in Partien abtheilen und nach (27) befragen,

ob und wie viel solcher Wurzelpunkte in jeder einzelnen solchen Partie enthalten sind. Für eine Gerade dieser Art, welche der Gleichung $x = a$ entspricht, erhält man für $y^2 = v$

$$y Q_{ay} = \frac{f(a) - f_2(a) \frac{v}{2} + f_4(a) \frac{v^2}{24} - \dots}{f_1(a) - f_3(a) \frac{v^2}{6} + f_5(a) \frac{v^4}{120} - \dots} \quad (62)$$

also einen Ausdruck, welcher in Bezug auf v höchstens dem $\frac{1}{2}n$ ten Grade angehört, und dann bloss im Intervall $[v = 0 \text{ bis } v = \infty]$ in Betracht zu ziehen sein wird.

Findet man in Bezug auf den rechts stehenden Ausdruck im Intervalle die Zahl μ als Mutationsanzahl, so ergibt sich für den Ausdruck Q_{ay} im Intervall $[y = -\infty \text{ bis } y = +\infty]$ die Zahl 2μ als Mutationsanzahl, und man hat schliesslich:

$$m' = n + \mu, \quad m = n - \mu$$

mit der Deutung, dass m' Wurzelpunkte auf der linken und m Wurzelpunkte auf der rechten Seite der Geraden $x = a$ sich vorfinden.

Aus der in diesem Paragraphe gegebenen Auseinandersetzung kann der Leser von Fall zu Fall genügende Anhaltspunkte schöpfen, um nach und nach von grösseren Raumabtheilungen zu immer kleineren und kleineren Raumpartien übergehend, die Orte der einzelnen Wurzelpunkte von einander zu trennen und zur wirklichen Berechnung der entsprechenden Wurzeln vorzubereiten. Hiebei ist der Umstand als besonders günstig anzuerkennen, dass bei günstiger Gelegenheit die Bürde der Untersuchung der einzelnen Raumpartien auf mehrere Mitrechner vertheilt werden kann, welche gleichzeitig rechnend, an gemeinschaftlichen Grenzlinien sich gegenseitig unterstützend, sehr rasch die beiläufigen Orte der einzelnen Wurzelpunkte anzugeben vermögen. (63)

Zum Behufe der Auffindung eines theoretisch möglichst kurzen Intervalls, in welchem die sämtlichen primären Wurzeln der Gleichung (52) sich einfinden, sei

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_{n-r} x^{n-r} + \dots + A_{n-s} x^{n-s} + \dots + A_0 = 0 \quad (64)$$

Hieraus findet man:

$$f_w(x) : s! = \binom{n}{w} A_n x^{n-w} + \binom{n-1}{w} A_{n-1} x^{n-w-1} + \dots + \binom{n-r}{w} A_{n-r} x^{n-w-r} + \dots + \binom{n-s}{w} A_{n-s} x^{n-w-s} + \dots + \binom{w}{w} A_w ; - \quad (65)$$

ferner sei in (64) von links nach rechts gehend A_{n-r} der erste negative und A_{n-s} der numerisch grösste von den negativen Coëfficienten; dann ist in (65) $\binom{n-r}{w} A_{n-r}$ der erste negative und $\binom{n-s}{w} A_{n-s}$ numerisch grösser, als jeder in (65) vorkommende negative Coëfficient. Es ist nämlich der Factor $\binom{n-r}{w}$ der grösste von den neben negativen A stehenden Binomialcoëfficienten, und A_{n-s} das grösste von den negativen A , daher — wie schon bemerkt — das Product $\binom{n-s}{w} A_{n-s}$ numerisch grösser, als jeder in (65) spielende negative Coëfficient.

Für $x > 1$, $A_n > 0$ ist ganz gewiss

$$A_n x^n + A_{n-s} \{x^{n-r} + x^{n-r-1} + \dots + x + 1\} < f(x) \quad (66)$$

daher $f(x)$ ganz gewiss positiv ausfallen muss, sobald der links in (66) stehende Ausdruck positiv sich ergibt. Dies wird der Fall sein, wenn für $A_{n-s} : A_n = -\xi$ (67)

$$x^n > \xi \frac{x^{n-r+1}-1}{x-1} \text{ und um so mehr, wenn } x^n(x-1) > \xi x^{n-r+1} \text{ oder}$$

$$x^{r-1}(x-1) > \xi \text{ und um so mehr, wenn } (x-1)^r > \xi;$$

wenn somit

$$(68) \quad x > (\sqrt[r]{\xi+1}) = L$$

gewählt wird. Für jedes der (68) genügende x erhält $f(x)$ ganz gewiss einen positiven von Null verschiedenen Werth. Daher darf keine der (64) entsprechende positive Wurzel den Ausdruck L übertreffen.

Setzt man in (65)

$$\binom{n-r}{w} A_{n-s} : \binom{n}{r} A_n = - \left[\binom{n-r}{w} : \binom{n}{r} \right] \xi = -\xi',$$

so erhält man auf gleiche Weise die Relation

$$x > (\sqrt[r]{\xi'+1}),$$

und es lässt sich behaupten, dass die dieser Relation genügenden x -Werthe eine jede positive der Gleichung $f_w(x) = 0$ angehörige Wurzel übertreffen. Da jedoch $\xi > \xi'$, so ist es ausgemacht, dass der Ausdruck L von keiner positiven Wurzel übertroffen werden darf, welche aus einer der Gleichungen

$$f(x) = f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_{n-2}(x) = f_{n-1}(x) = 0$$

gezogen wird.

Aus (64) erhält man, $x = -v$ setzend:

$$(70) \quad \pm f(-v) = A_n v^n - A_{n-1} v^{n-1} + A_{n-2} v^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} A_1 v + (-1)^n A_0 = 0.$$

Bestimmt man hier ebenfalls eine Zahl L' , welche von keiner positiven Wurzel der Gleichung (70), d. h. von keiner negativen Wurzel der Gleichung (64) in numerischer Beziehung übertroffen wird, so erhält man schliesslich ein

$$(71) \quad \text{von } -L' \text{ bis } L \text{ reichendes Intervall,}$$

in welchem alle möglichen positiven und negativen primären Wurzeln der Gleichung (64) und ihrer Derivirten enthalten sind.

Im nächsten Paragraphe wollen wir ein geregeltes Verfahren begründen, welches zum Zwecke hat, eine in einigen Anfangsstellen bereits ermittelte Wurzel einer Gleichung durch Rechnung mit jeder gewünschten Genauigkeit zu bestimmen. Um jedoch dem Gang der Rechnung die möglichste Einförmigkeit zu verleihen, wollen wir hier einiger sehr einfachen Transformationen Erwähnung thun, welche uns aus der vorgelegten Gleichung auf eine andere von der Beschaffenheit bringen, dass der der letzteren als Wurzel entsprechende complexe Ausdruck $x + iy$ ohne Änderung des numerischen Werthes sowohl in Bezug auf x , als auch in Bezug auf y positiv ausfalle.

Aus der Gleichung

$$(72) \quad F(u) = f(u) + i\varphi(u) = 0$$

können wir unmittelbar noch folgende drei herleiten:

$$(73) \quad f(+u) - i\varphi(+u) = 0$$

$$(74) \quad f(-u) + i\varphi(-u) = 0$$

$$(75) \quad f(-u) - i\varphi(-u) = 0.$$

Ist nun $u = +x + iy$ eine Wurzel der Gleichung (72), so ist ganz gewiss:

$$u = +x - iy \quad " \quad " \quad " \quad (73),$$

$$u = -x - iy \quad " \quad " \quad " \quad (74),$$

$$u = -x + iy \quad " \quad " \quad " \quad (75),$$

(76)

und es wird bei beliebigem Vorzeichen von x und y unter den vier in (76) angedeuteten Wurzelformen Eine vorhanden sein, deren primärer und secundärer Bestandtheil ein positives Zeichen bezeugt. Aus der so bestimmten Wurzelform wird sich dann die geforderte Form ohne Weiteres angeben lassen.

§. 4.

Gesetzmässige Einschliessung der Wurzeln (Wurzelpunkte) in stets engere und engere Grenzen.

Lässt man die Grössen x, y, Z_0, z_0 beziehungsweise in

$$\dot{x} = x + \Delta x, \quad \dot{y} = y + \Delta y, \quad \dot{Z}_0 = Z_0 + \Delta Z_0, \quad \dot{z}_0 = z_0 + \Delta z_0 \quad (1)$$

übergehen, und sieht die Zusätze $\Delta x, \Delta y$ als gehörig klein an, so erhält man mit Hilfe des Taylor'schen Lehrsatzes und mit Beibehaltung der Glieder mit Einschluss der zweiten Ordnung in Bezug auf $\Delta x, \Delta y$:

$$\dot{Z}_0 = Z_0 + Z_1 \Delta x - z_1 \Delta y + [Z_2(\Delta x^2 - \Delta y^2) - 2z_2 \Delta x \Delta y], \quad (2)$$

$$\dot{z}_0 = z_0 + z_1 \Delta x + Z_1 \Delta y + [z_2(\Delta x^2 - \Delta y^2) + 2Z_2 \Delta x \Delta y];$$

oder

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0 - Z_0 &= Z_1(\dot{x} - x) - z_1(\dot{y} - y) + [Z_2([\dot{x} - x]^2 - [\dot{y} - y]^2) - 2z_2[\dot{x} - x][\dot{y} - y]] \\ \dot{z}_0 - z_0 &= z_1(\dot{x} - x) + Z_1(\dot{y} - y) + [z_2([\dot{x} - x]^2 - [\dot{y} - y]^2) + 2Z_2[\dot{x} - x][\dot{y} - y]]. \end{aligned} \quad (3)$$

Für einen in xoy angenommenen Punkt p ist sein Ausdruck $x + iy$, hiemit auch die Werthe von Z_0 und z_0 bestimmte Grössen, welche die Längen der in p zu errichtenden Perpendikel andeuten, um zu den zu p gehörigen conjugirten Punkten P, p zu gelangen, von denen der erste auf der primären, der zweite auf der secundären Hilfsfläche enthalten ist. Lässt man in (3) die Grössen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{Z}_0, \dot{z}_0$ als laufende Coordinaten gelten, so sieht man ein, dass die in (3) angedeuteten Flächen zweiter Ordnung (Sattelflächen) mit den Hilfsflächen: $z = Z_0, z = z_0$ in den Punkten P, p eine Osculation zweiter Ordnung eingehen. Man könnte diese Flächen conjugirte Berührungsflächen nennen. Diese Flächen liefern mit zu xoy parallelen Ebenen lauter hyperbolische Schnitteurven und besitzen ihre Centra in derjenigen Verticalen, welche im Punkte $\xi + i\eta = x + iy - \frac{1}{2} \frac{Z_1 + iz_1}{Z_2 + iz_2}$ errichtet wird. (4)

Für $Z_1 = z_1 = 0$ würde man $\xi + i\eta = x + iy$ erhalten und zugeben, dass diesfällig die Mittelpunkt-verticalen durch p selbst hindurchgeht. Legt man durch den Fusspunkt p dieser Verticalen in xoy vier Gerade von der Beschaffenheit, dass je zwei und zwei derselben die Richtungen des einem der Hyperbel-systeme angehörigen Asymptotenpaares repräsentiren, so erhält man einen Strahlenbusch von 8 von p ausgehenden Radien, von denen je zwei Nachbarstrahlen einen Winkel von 45° einschliessen. Der von zwei Nachbarstrahlen des einen Systems gebildete Winkel wird durch einen Strahl des anderen Systems halbiert. (Siehe §. 2 (25).

Lässt man in (3) die Glieder der zweiten Ordnung weg, so erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0 - Z_0 &= Z_0[\dot{x} - x] - z_1[\dot{y} - y] \cdot \cdot \cdot \cdot E_{pt} \\ \dot{z}_0 - z_0 &= z_1[\dot{x} - x] + Z_1[\dot{y} - y] \cdot \cdot \cdot \cdot e_{pt} \end{aligned} \quad (5)$$

als Gleichungen zweier Ebenen, von welchen die erste E_{pt} in P die primäre, die zweite e_{pt} in p die sekundäre Hilfsfläche berührt.

Sind λ, μ, ν die Richtungswinkel der primären und λ', μ', ν' die Richtungswinkel der sekundären Berührungsebene, so erhält man aus (5)

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{für } \sqrt{1+\sigma_1^2} = v \quad \cos \lambda &= \frac{Z_1}{v}; \quad \cos \mu = -\frac{z_1}{v}; \quad \cos \nu = -\frac{1}{v} \\ \cos \lambda' &= \frac{z_1}{v}; \quad \cos \mu' = -\frac{Z_1}{v}; \quad \cos \nu' = -\frac{1}{v} \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$(7) \quad \cos [E_{pt}, e_{pt}] = \frac{1}{v^2}.$$

Aus (7) lässt sich der von den zwei berührenden Ebenen eingeschlossene Winkel bestimmen.

Ist p in endlicher Distanz vom Axenursprunge, so muss v endlich verbleiben, und es darf weder $\cos \nu$ noch $\cos \nu'$ den Nullwerth annehmen. Hieraus schliesst man, dass die Hilfsflächen in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte keine Berührungsebenen besitzen, welche auf xoy senkrecht stehen. Es dürfen somit die zugehörigen Flächenelemente zur Axe oz nicht parallel erscheinen. Auch ist es leicht einzusehen, dass die Ebenen E_{pt} und e_{pt} auf einander nicht senkrecht stehen dürfen, sobald p in endlicher Distanz vom Axenursprunge sich befindet.

Um die Gleichungen der horizontalen Berührungsgeraden L_{pt}, l_{pt} in P und p zu erhalten, setze man in (3) $\dot{Z}_0 = Z_0, \dot{z}_0 = z_0$ und gelangt zu folgenden:

$$(8) \quad \begin{aligned} Z_1(\dot{x}-x) - z_1(\dot{y}-y) &= 0 \dots L_{pt} \\ z_1(\dot{x}-x) + Z_1(\dot{y}-y) &= 0 \dots l_{pt} \end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass diese Geraden auf einander senkrecht stehen. Ist hierbei $\sigma_0 = Z_0 = z_0 = 0$, so bildet der Ausdruck $x + iy$ eine Wurzel der Gleichung $F(u) = 0$, die Geraden in (8) schneiden sich in p und belehren uns, dass die in p sich begegnenden Elemente der primären und sekundären Trasse auf einander senkrecht stehen. In diesem Falle bildet p einen einfachen Wurzelpunkt der Gleichung $F(u) = 0$.

Bezeichnet man mit μ_1, μ_2 die Winkel, welche die Geraden L_{pt}, l_{pt} mit ox einschliessen, so findet man aus (8) mit Rücksicht auf §. 1 (4) und (6)

$$(9) \quad \begin{aligned} \tan \mu_1 &= \frac{Z_1}{z_1}; \quad \tan \mu_2 = -\frac{z_1}{Z_1} \quad \text{und hieraus} \\ \mu_1 &= \alpha_1; \quad \mu_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Denken wir uns zwei Paare von Punkten in xoy , bezeichnen das erste Paar mit $(p, \dot{p})$, das zweite aus dem ersten abgeleitete mit $(\ddot{p}, \ddot{\ddot{p}})$.

Im Tableau

$$(10) \quad \begin{cases} p, x, y, Z_0, Z_1, Z_2 \dots z_0, z_1 \dots P, p, E_{pt}, E_p, e_{pt}, e_p \\ \dot{p}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{Z}_0, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2 \dots \dot{z}_0, \dot{z}_1 \dots \dot{P}, \dot{p}, \dot{E}_{pt}, \dot{E}_p, \dot{e}_{pt}, \dot{e}_p \\ \ddot{p}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{Z}_0, \ddot{Z}_1, \ddot{Z}_2 \dots \ddot{z}_0, \ddot{z}_1 \dots \ddot{P}, \ddot{p} \\ \ddot{\ddot{p}}, \ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{y}}, \ddot{\ddot{Z}}_0, \ddot{\ddot{Z}}_1, \ddot{\ddot{Z}}_2 \dots \ddot{\ddot{z}}_0, \ddot{\ddot{z}}_1 \dots \ddot{\ddot{P}}, \ddot{\ddot{p}} \end{cases}$$

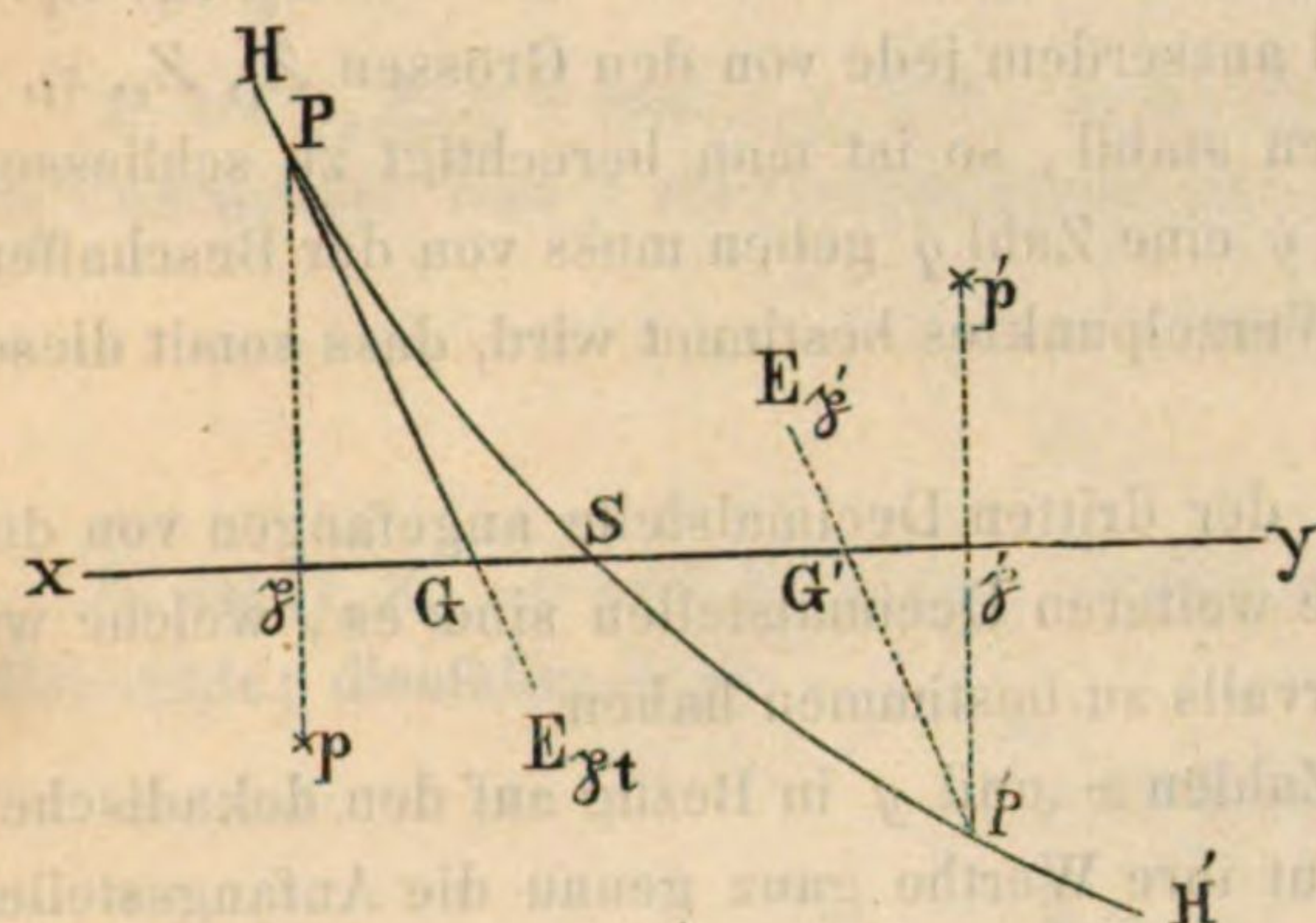
sind die Systeme von je zusammengehörigen Punkten, Ebenen und Functionen dadurch gekennzeichnet, dass man über jedes einzelne Symbol desselben Systems entweder keinen oder eine gleiche Anzahl von Strichen gesetzt hat.

E_{pt} und e_{pt} deuten das conjugirte Ebenenpaar an, welche die Hilfsflächen in den über p befindlichen Punkten P und p berühren. Dasselbe gilt von $E_{\dot{p}t}$ und $e_{\dot{p}t}$ mit Rücksicht auf den Punkt $\dot{p}$. E_p und e_p deuten auf Schnittebenen hin, in den zu p gehörigen conjugirten Punkten P und p von der Beschaffenheit, dass

$$E_p // E_{pt}, \quad e_p // e_{pt} \text{ sich ergibt.} \quad (11)$$

$E_{\dot{p}}$ und $e_{\dot{p}}$ deuten auf Schnittebenen, in $\dot{P}$ und $\dot{p}$ dergestalt hin, dass $E_{\dot{p}} // E_{pt}$, $e_{\dot{p}} // e_{pt}$ sich ausbreitet. Im Tableau sind also die angedeuteten je zwei unter einander stehenden Ebenen unter einander parallel.

In der Nähe eines einfachen Wurzelpunktes können wir eine jede Hilfsfläche als eine kleine Partie einer berührenden Sattelfläche ansehen. Diese Partie zerfällt in zwei Abtheilungen, welche von der entsprechenden Trasse ausgehend, die eine oberhalb, die andere unterhalb der xoy ihren Verlauf nehmen. Da in diesem geringen Flächenelement von der wellenförmigen Krümmung dieser Fläche nicht die Rede sein kann, so ist es klar, dass wenn etwa die obere Flächenpartie der Ebene xoy ihre convexe Seite zukehrt, die untere sich ganz gewiss mit ihrer concaven Seite wenden muss gegen



die xoy , und umgekehrt. Die Punkte dieser Abtheilungen mögen Convexitäts- oder Concavitätspunkte heißen, je nachdem die entsprechende Flächenpartie in Bezug auf xoy convex oder concav sich verläuft. (12)

Ist man im Besitze zweier Punkte p und $\dot{p}$ in der Ebene xoy , welche zu beiden Seiten eines jeden der sich schneidenden Trassenzweige, also so zu sagen in die von diesen Trassenzweigen gebildeten Scheitelwinkel vertheilt sind, und an dem Wurzelpunkt selbst hinlänglich nahe liegen, so werden die zugehörigen, etwa auf der primären Hilfsfläche lagernden Punkte P , $\dot{P}$ ganz gewiss auf entgegengesetzten Seiten der xoy sich einfinden. Ist einer von diesen Punkten, etwa P ein Convexitätspunkt, so muss dann der andere, nämlich $\dot{P}$ nothwendiger Weise ein Concavitätspunkt sein. Eine berührende Ebene E_{pt} an die Hilfsfläche im Convexitätspunkt P und eine Schnittebene $E_{\dot{p}}$ durch den Concavitätspunkt $\dot{P}$ werden die xoy vermöge (11) in zwei parallelen Geraden schneiden, welche sichtlich an der entsprechenden Trassenpartie näher gelagert sind, als die ursprünglichen Punkte p und $\dot{p}$. In (12) ist im Verticalschnitt der eben beschriebene Process zur Anschauung gebracht. HH' stellt die primäre Hilfsfläche dar mit dem Convexitätspunkte P und dem Concavitätspunkte $\dot{P}$. In PG ist die berührende und $\dot{P}G'$ die schneidende Ebene dargestellt. G und G' sind Punkte der erwähnten zwei parallelen Geraden, welche an die in S angedeutete Kreuzung der Trassen näher gerückt sind, als p und $\dot{p}$. (13)

Sei ferner $\dot{p}$ der Convexitätspunkt und p der Concavitätspunkt in der secundären Hilfsfläche, so erhält man die Ebenen $e_{\dot{p}t}$ und e_{pt} , welche von der Ebene xoy geschnitten, zwei parallele Gerade g und $\dot{g}$ liefern. Auch diese Geraden liegen an dem Kreuzungspunkte der Trassen näher, als die Punkte $\dot{p}$ und p .

In sofern p und $\dot{p}$ an einander genug nahe gedacht werden, können wir auf Grundlage (8) schliessen, dass die Richtung der Geraden $G//G'$ von der Richtung der Geraden $g//\dot{g}$ beinahe um einen rechten Winkel differirt. Dieser Umstand und das in (13) Angeführte berechtigen uns zu der Erwartung, dass die Punkte $\dot{p}$ und $\dot{p}$, von welchen der erste in G und g , der zweite in G' und $\dot{g}$ enthalten ist, an den Kreuzungspunkt der Trassen näher zu liegen kommen, als die angenommenen Punkte p und $\dot{p}$. (14)

Der eben angeführten Darstellung gemäss

$$\begin{aligned} &\text{liegt der Punkt } \dot{p} \text{ in den Ebenen: } xoy, E_{pt}, e_p \\ &\text{und der Punkt } \dot{p} \text{ in den Ebenen: } xoy, E_{\dot{p}}, e_{\dot{p}t}. \end{aligned} \quad (15)$$

Hiemit hätten wir das Princip zur Darstellung gebracht, auf Grund dessen man den Übergang vom angenommenen Punktpaar $(p, \dot{p})$ zum abgeleiteten $(\dot{p}, \dot{p})$ ohne alle Schwierigkeit durch Rechnung bewerkstel-

ligen kann. Es bleibt uns nur übrig, den Übergang von p zu $\dot{p}$ derart einzuleiten, dass hieraus die Evidenz sehr leicht geschöpft werden kann, welche von den Punkten $P, \dot{P}, p, \dot{p}$ als Convexitäts-, und welche als Concavitätspunkte zu betrachten sein werden. In weiterer Folge werden wir bemüht sein, den Nachweis zu liefern, inwiefern das durch $\dot{p}$ und $\ddot{p}$ begrenzte Intervall den Wurzelpunkt enger einschliesst, als das ursprünglich angenommene Intervall zwischen den Punkten p und $\dot{p}$.

Denken wir uns den Punkt p durch den Ausdruck $(23 \cdot 24 + 31 \cdot 56 i)$ bestimmt, so ist hier $x = 23 \cdot 24$, $y = 31 \cdot 56$, und für Weiteres lassen sich die Ausdrücke $Z_0, Z_1, Z_2 \dots z_0, z_1, z_2 \dots$ mit Zugrundelegung dieser Werthe von x und y ermitteln. Setzen wir $\Delta x = \Delta y = \tau = 10^{-2}$, so finden wir zur Bestimmung von $\dot{p}$ $\dot{x} = 23 \cdot 25$, $\dot{y} = 31 \cdot 57$, d. h. Zahlen, welche aus x und y durch Erhöhung ihrer dekadischen Schlussstellen um eine Einheit hervorgehen. Den Werthen von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ entsprechend lassen sich die Grössen $\dot{Z}_0, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2 \dots \dot{z}_0, \dot{z}_1, \dot{z}_2 \dots$ berechnen. Findet man $Z_0 \cdot \dot{Z}_0 < 0$, $z_0 \cdot \dot{z}_0 < 0$ und ausserdem jede von den Grössen Z_1, Z_2, z_1, z_2 in dem angenommenen Intervall in Bezug auf das Vorzeichen stabil, so ist man berechtigt zu schliessen, dass es zwischen x und $\dot{x}$ eine Zahl p , dann zwischen y und $\dot{y}$ eine Zahl q geben muss von der Beschaffenheit, dass durch den Ausdruck $p + qi$ die Lage des wahren Wurzelpunktes bestimmt wird, dass somit dieser Ausdruck den zu bestimmenden Wurzelwerth selbst darstellt.

Die Zahlen p und q werden natürlicher Weise erst von der dritten Decimalstelle angefangen von den Zahlen x und y sich verschieden gestalten, und eben diese weiteren Decimalstellen sind es, welche wir durch die sogenannte Methode der Einengung des Wurzelintervalls zu bestimmen haben.

Sei nun der Ausdruck $x + iy$ so beschaffen, dass die Zahlen x und y in Bezug auf den dekadischen Zeiger ihrer Schlussziffern übereinstimmen, und in Bezug auf ihre Werthe ganz genau die Anfangsstellen des primären und des secundären Bestandtheiles der in Rechnung stehenden Wurzel repräsentiren. Zur Bestimmung von $\dot{p}$ erhalten wir $\dot{x} + i\dot{y} = (x + \tau) + i(y + \tau)$, wobei τ eine Einheit der dekadischen Schlussstelle von x und y andeuten mag. In diesem Falle ist die Verbindungsgerade von $p, \dot{p}$ eine solche, welche den Winkel xoy halbirt, — und der Übergang von einem Punkte dieser Geraden zum nächstfolgenden geschieht dadurch, dass man die Coordinaten des vorhergehenden Punktes um gleiche Incremente $\Delta x = \Delta y$ vermehrt.

Zur Bestimmung der Punktfolgen auf der primären und secundären Hilfsfläche, oder eigentlich auf den zugehörigen Berührungssattelflächen, welche über der Geraden $p\dot{p}$ liegen, erhält man aus (2)

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{Z}_0 &= Z_0 + \Delta x(Z_1 - z_1) - 2z_2 \Delta x^2, \\ \dot{z}_0 &= z_0 + \Delta x(Z_1 + z_1) + 2Z_2 \Delta x^2, \end{aligned}$$

mittelst welchen man für jedes angenommene kleine Δx die Werthe von $\dot{Z}_0$ und $\dot{z}_0$ berechnen kann. Für $\Delta x = 0$ geht aus der ersten Gleichung der Punkt $\dot{P}$ mit den Coordinaten (x, y, Z_0) und aus der zweiten der Punkt p mit den Coordinaten (x, y, z_0) hervor.

Aus (18) erhält man durch Vernachlässigung der Glieder mit Δx^2 die Gleichungen der berührenden Geraden, von denen die Eine die primäre Punktfolge in P , die andere die secundäre in p berührt. Diese Gleichungen sind:

$$(19) \quad \dot{Z}_0 = Z_0 + \Delta x(Z_1 - z_1); \quad \dot{z}_0 = z_0 + \Delta x(Z_1 + z_1).$$

Für $z_2 Z_0 > 0$ ist bei beliebigem kleinen Δx $\dot{Z}_0$ numerisch kleiner als $\dot{Z}_0$. Es wird demgemäss jeder Nachbarpunkt von P in der primären Punktfolge zwischen der berührenden Geraden und der Ebene xoy sich aufhalten, und der Punkt P ist in diesem Falle ein Concavitätspunkt. Für $z_2 Z_0 < 0$ ist $\dot{Z}_0$ numerisch grösser als $\dot{Z}_0$, und P ist in diesem Falle ein Convexitätspunkt.

(20) Für $Z_2 z_0 > 0$ ist bei beliebigem kleinen Δx $\dot{z}_0$ numerisch grösser als $\dot{z}_0$, und p ist in diesem Falle ein Convexitätspunkt. Eben so ist für $Z_2 z_0 < 0$ der Punkt p ein Concavitätspunkt.

Hieraus ersehen wir, dass die im Früheren eingelegte Verwahrung gegen etwaige wellenförmige Gestaltung der Flächenelemente in der Nähe eines einfachen Wurzelpunktes bei dieser Untersuchung ihren gehö-

rigen Ausdruck darin findet, dass man im Intervall $p\dot{p}$ an der Stabilität der Vorzeichen von Z_2 und z_2 festhält.

Wenn man den in (13) dargelegten Vorgang mit Rücksicht auf die in (20) erkannten Bedingungen gehörig würdigt, so lassen sich in Bezug auf die Berechnung einer complexen mit gleichbezeichneten Bestandtheilen versehenen Wurzel 4 eventuell möglichen Fälle unterscheiden:

1. Ist $(z_2 Z_0 < 0 \text{ und } Z_2 z_0 > 0)$, so sind P und p Convexitätspunkte, und demnach $\dot{P}$ und $\dot{p}$ Concavitätspunkte. In diesem Falle liegt

$$\begin{aligned} \ddot{p} & \text{ in den Ebenen } xoy, E_{pt}, e_{pt}, \\ \ddot{p} & \text{ " " " } xoy, E_{\dot{p}}, e_{\dot{p}}, \end{aligned} \quad (21)$$

2. Ist $(z_2 Z_0 < 0 \text{ und } Z_2 z_0 < 0)$, so ist P ein Convexitätspunkt und p ein Concavitätspunkt, demnach $\dot{P}$ ein Concavitäts- und $\dot{p}$ ein Convexitätspunkt. In diesem Falle liegt

$$\begin{aligned} \ddot{p} & \text{ in den Ebenen } xoy, E_{pt}, e_p, \\ \ddot{p} & \text{ " " " } xoy, E_{\dot{p}}, e_{\dot{p}}, \end{aligned} \quad (22)$$

3. Ist $(z_2 Z_2 > 0 \text{ und } Z_2 z_0 > 0)$, so sind P und $\dot{p}$ Concavitätspunkte, und die übrigen $\dot{P}$ und p Convexitätspunkte; diesfällig liegt

$$\begin{aligned} \ddot{p} & \text{ in den Ebenen } xoy, E_p, e_{pt}, \\ \ddot{p} & \text{ " " " } xoy, E_{\dot{p}}, e_{\dot{p}}, \end{aligned} \quad (23)$$

4. Ist endlich $(z_2 Z_0 > 0 \text{ und } Z_0 z_2 < 0)$, so sind P und p Concavitätspunkte, und demnach die Punkte $\dot{P}$ und $\dot{p}$ Convexitätspunkte; dann liegt

$$\begin{aligned} \ddot{p} & \text{ in den Ebenen } xoy, E_p, e_p, \\ \ddot{p} & \text{ " " " } xoy, E_{\dot{p}}, e_{\dot{p}}. \end{aligned} \quad (24)$$

In (21) geht die Ebene E_{pt} durch die Punkte $(\ddot{x}, \ddot{y}, o)$, (x, y, Z_0) und ist eine berührende Ebene in P , ebenso geht die Ebene e_{pt} durch die Punkte $(\ddot{x}, \ddot{y}, o)$, (x, y, z_0) und berührt die secundäre Hilfsfläche in p . Dies gibt nach (5) zur Bestimmung von $\ddot{p}$ folgende Gleichungen:

$$o - Z_0 = Z_1(\ddot{x} - x) - z_1(\ddot{y} - y); \quad o - z_0 = z_1(\ddot{x} - x) + Z_1(\ddot{y} - y) \quad (25)'$$

Aus diesen erhält man:

$$\ddot{x} - x = -\frac{Z_0 Z_1 + z_0 z_1}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}; \quad \ddot{y} - y = \frac{Z_0 z_1 - Z_1 z_0}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1} \quad (25)$$

In (21) geht die Ebene $E_{\dot{p}}$ durch die Punkte $(\ddot{x}, \ddot{y}, o)$, $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{Z}_0)$ und ist zur E_{pt} parallel; eben so geht die Ebene $e_{\dot{p}}$ durch die Punkte $(\dot{x}, \dot{y}, o)$, $(\ddot{x}, \ddot{y}, \dot{z}_0)$ und ist zur e_{pt} parallel. Aus den hieraus resultirenden Gleichungen:

$$0 - \dot{Z}_0 = Z_1(\ddot{x} - \dot{x}) - z_1(\ddot{y} - \dot{y}); \quad 0 - \dot{z}_0 = z_1(\ddot{x} - \dot{x}) + Z_1(\ddot{y} - \dot{y}) \quad (26)'$$

erhält man:

$$\dot{x} - \ddot{x} = \frac{\dot{Z}_0 Z_1 + \dot{z}_0 z_1}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}; \quad \dot{y} - \ddot{y} = \frac{\dot{z}_0 Z_1 - \dot{Z}_0 z_1}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1} \quad (26)$$

In (25) und (26) haben wir die Lage von $\ddot{p}$ und $\dot{p}$ mit Rücksicht auf (21) festgestellt, und es wird sehr leicht sein, dasselbe Verfahren beobachtend, die Lage dieser Punkte mit Rücksicht auf (22), (23) und (24) zu bestimmen. Auf diese Weise gelangen wir zu folgendem Schema:

$$\begin{aligned}
 & \text{(I)} \quad \begin{cases} z_2 Z_0 < 0 \\ Z_2 z_0 > 0 \end{cases} \left[\begin{aligned} \ddot{x} - x &= -\frac{Z_0 Z_1 + z_0 z_1}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}, \quad \ddot{y} - y = \frac{Z_0 z_1 - Z_1 z_0}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1} \\ \dot{x} - \ddot{x} &= \frac{\dot{Z}_0 Z_1 + \dot{z}_0 z_1}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}, \quad \dot{y} - \ddot{y} = \frac{\dot{z}_0 Z_1 - \dot{Z}_0 z_1}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1} \end{aligned} \right] \\
 & \text{(II)} \quad \begin{cases} z_2 Z_0 < 0 \\ Z_2 z_0 < 0 \end{cases} \left[\begin{aligned} \ddot{x} - x &= -\frac{Z_0 \dot{Z}_1 + z_0 \dot{z}_1}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1}, \quad \ddot{y} - y = \frac{Z_0 \dot{z}_1 - Z_1 \dot{z}_0}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1} \\ \dot{x} - \ddot{x} &= \frac{\dot{Z}_0 \dot{Z}_1 + \dot{z}_0 \dot{z}_1}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1}, \quad \dot{y} - \ddot{y} = \frac{\dot{z}_0 \dot{Z}_1 - \dot{Z}_0 \dot{z}_1}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1} \end{aligned} \right] \\
 & \text{(III)} \quad \begin{cases} z_2 Z_0 > 0 \\ Z_2 z_0 > 0 \end{cases} \left[\begin{aligned} \ddot{x} - x &= -\frac{Z_0 \dot{Z}_1 + z_0 \dot{z}_1}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1}, \quad \ddot{y} - y = \frac{Z_0 \dot{z}_1 - Z_1 \dot{z}_0}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1} \\ \dot{x} - \ddot{x} &= \frac{\dot{Z}_0 \dot{Z}_1 + \dot{z}_0 \dot{z}_1}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1}, \quad \dot{y} - \ddot{y} = \frac{\dot{z}_0 \dot{Z}_1 - \dot{Z}_0 \dot{z}_1}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1} \end{aligned} \right] \dots \left. \begin{aligned} & \dots \\ & \dots \end{aligned} \right\} xy < 0 \\
 & \text{(IV)} \quad \begin{cases} z_2 Z_0 > 0 \\ Z_2 z_0 < 0 \end{cases} \left[\begin{aligned} \ddot{x} - x &= -\frac{Z_0 \dot{Z}_1 + z_0 \dot{z}_1}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1}, \quad \ddot{y} - y = \frac{Z_0 \dot{z}_1 - Z_1 \dot{z}_0}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1} \\ \dot{x} - \ddot{x} &= \frac{\dot{Z}_0 \dot{Z}_1 + \dot{z}_0 \dot{z}_1}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1}, \quad \dot{y} - \ddot{y} = \frac{\dot{z}_0 \dot{Z}_1 - \dot{Z}_0 \dot{z}_1}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1} \end{aligned} \right]
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Setzt man in (2) $\Delta x = \Delta y = \tau$, so erhält man:

$$\dot{Z}_0 - Z_0 = \tau(Z_1 - z_1) - 2\tau^2 z_2, \quad \dot{z}_0 - z_0 = \tau(Z_1 + z_1) + 2\tau^2 Z_2.
 \tag{28}$$

Setzt man in diese Gleichungen durchgehends an die Stelle von τ die Grösse $-\tau$, so ist es auch nöthig, die mit Strichen begabten Grössen von denselben zu befreien — und andererseits die von Strichen freien Grössen mit Strichen zu begaben. Demgemäss erhält man aus (28):

$$\dot{Z}_0 - \dot{Z}_0 = -\tau(\dot{Z}_1 - \dot{z}_1) - 2\tau^2 \dot{z}_2, \quad \dot{z}_0 - \dot{z}_0 = -\tau(\dot{Z}_1 + \dot{z}_1) + 2\tau^2 \dot{Z}_2.
 \tag{29}$$

Setzt man $\ddot{x} - \ddot{x} = \tau_1$, $\ddot{y} - \ddot{y} = \tau_2$, so erhalten wir durch Subtraction je einer Gleichung aus (26)' von der correspondirenden Gleichung in (25)'

$$-\dot{Z}_0 + Z_0 = Z_1 \tau_1 - z_1 \tau_2 - \tau(Z_1 - z_1); \quad -\dot{z}_0 + z_0 = z_1 \tau_1 + Z_1 \tau_2 - \tau(Z_1 + z_1).
 \tag{30}$$

Addirt man die Gleichungen (30) je zur entsprechenden Gleichung in (28), so hat man:

$$Z_1 \tau_1 - z_1 \tau_2 - 2\tau^2 z_2 = 0, \quad z_1 \tau_1 + Z_1 \tau_2 + 2\tau^2 Z_2 = 0,$$

und hieraus

$$\text{(I)' } \dots \tau_1 = \ddot{x} - \ddot{x} = 2\tau^2 \frac{Z_1 z_2 - z_1 Z_2}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}; \quad \tau_2 = \ddot{y} - \ddot{y} = -2\tau^2 \frac{Z_1 Z_2 + z_1 z_2}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}.
 \tag{31}$$

Diese Bestimmung der Intervalldistancen τ_1 und τ_2 ist ein Resultat der Bestimmungsgleichungen (25)' und (26)', welche zur Angabe der Lage von $\tilde{p}$, $\tilde{p}$ im Falle (I) verwendet wurden.

Wenn wir auf gleiche Weise die in (II), (III), (IV) zu Grunde liegenden Bestimmungsgleichungen behandeln, und hiebei von den Relationen (28) oder (29) gehörigen Gebrauch machen, so erhalten wir den Fällen (II), (III), (IV) entsprechend, zur Angabe der resultirenden Intervalle τ_1 , τ_2 folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
 \text{(II)}' \dots \tau_1 = \ddot{x} - \ddot{x} &= 2\tau^2 \frac{z_2 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{Z}_2}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1}, & \tau_2 = \ddot{y} - \ddot{y} &= 2\tau^2 \frac{Z_1 \dot{Z}_2 - \dot{z}_1 z_2}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1} \\
 \text{(III)}' \dots \tau_1 = \ddot{x} - \ddot{x} &= -2\tau^2 \frac{\dot{z}_2 Z_1 + Z_2 \dot{z}_1}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1}, & \tau_2 = \ddot{y} - \ddot{y} &= 2\tau^2 \frac{z_1 \dot{z}_2 + \dot{Z}_1 Z_2}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1} \\
 \text{(IV)}' \dots \tau_1 = \ddot{x} - \ddot{x} &= 2\tau^2 \frac{\dot{z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_1 \dot{z}_2}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1}, & \tau_2 = \ddot{y} - \ddot{y} &= 2\tau^2 \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{z}_1 \dot{z}_2}{Z_1 \dot{Z}_1 + z_1 \dot{z}_1}
 \end{aligned} \tag{32}$$

In Beziehung auf die conjugirten Punkte $P, \bar{P}, \bar{p}, \bar{p}$, welche über den in xoy lagernden Punkten $p, \bar{p}$, auf den entsprechenden Hilfsflächen liegen, erhält man nach (3) die Relationen:

$$\begin{aligned}
 \tau_3 = \ddot{Z}_0 - \ddot{Z}_0 &= -\tau_1 \ddot{Z}_1 + \tau_2 \ddot{z}_1 + \ddot{Z}_2 (\tau_2^2 - \tau_1^2) + 2\tau_1 \tau_2 \ddot{z}_2 \\
 \tau_3 = \ddot{z}_0 - \ddot{z}_0 &= -\tau_1 \ddot{z}_1 - \tau_2 \ddot{Z}_1 + \ddot{z}_2 (\tau_2^2 - \tau_1^2) - 2\tau_1 \tau_2 \ddot{Z}_2,
 \end{aligned} \tag{33}$$

welche zur Ermittlung der jeweiligen Verticalintervalle zwischen $\bar{P}, \bar{P}$, dann zwischen $\bar{p}, \bar{p}$ dienen, sobald man zu diesem Zwecke irgend welche der in (31), (32) enthaltenen Intervallbestimmungsformeln verwendet

Man findet ferner die Relationen:

$$\begin{aligned}
 \dot{Z}_2 &= Z_2 + 3\tau(Z_3 - z_3) + \& \\
 \dot{z}_2 &= z_2 + 3\tau(Z_3 + z_3) + \& \\
 \dot{Z}_1 &= Z_1 + 2\tau(Z_2 - z_2) + \& \\
 \dot{z}_1 &= z_1 + 2\tau(Z_2 + z_2) + \&
 \end{aligned} \tag{34}$$

aus welchen für gehörig kleines τ ersichtlich ist, dass von den Functionen Z_1, Z_2, z_1, z_2 jede einzeln innerhalb des Intervalls $[x + iy, \dot{x} + i\dot{y}]$ continuirlich wächst oder abnimmt, sobald man überzeugt ist, dass innerhalb des angeführten Intervalls auch die Ausdrücke $(Z_2 + z_2), (Z_2 - z_2), (Z_3 + z_3), (Z_3 - z_3)$ eine Stabilität ihres Vorzeichens bekräften.

In Bezug auf die Grössen $(Z_1 - z_1), (Z_1 + z_1)$ kann hier noch hinzugefügt werden, dass sie den Relationen

$$\begin{aligned}
 Z_0(Z_1 - z_1) &< 0, & Z_0(\dot{Z}_1 - \dot{z}_1) &< 0 \\
 z_0(Z_1 + z_1) &< 0, & z_0(\dot{Z}_1 + \dot{z}_1) &< 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

genügen müssen, wenn überhaupt von einer continuirlichen Einschliessung des zu bestimmenden Wurzelpunktes gehandelt wird. Es wird nämlich nur unter diesen Bedingungen möglich, beim Fortschritt im gedachten Intervall die Grössen Z_0 und z_0 , hiemit auch den Ausdruck $(Z_0 + iz_0)$ immer näher und näher dem Verschwinden zuzuführen.

Auf Grund (35) und der den Fall (I) kennzeichnenden Bedingungen findet man:

$$z_2(Z_1 - z_1) > 0; \quad Z_2(Z_1 + z_1) < 0,$$

hieraus

$$(z_2 Z_1 - z_1 Z_2) > (z_1 z_2 + Z_1 Z_2),$$

hiemit auch

$$\tau_1 > -\tau_2$$

und in der hier angedeuteten Weise vorgehend gelangt man zur Überzeugung, dass in den sämtlichen Fällen (I), (II), (III), (IV) sich die Relation

$$\tau_1 > -\tau_2 \quad \text{oder} \quad (\ddot{x} - \ddot{x}) > (\ddot{y} - \ddot{y}) \tag{36}$$

bestätigt, was auch sein muss, weil die Intervallabstände τ_1 und τ_2 beide positiv sich ergeben müssen.

Bei einer gegebenen Gleichung, deren Wurzel in dem bereits bekannten Ausdrucke $x + iy$ in Bezug auf beide Bestandtheile in den Anfangsstellen mit Einschluss etwa der n ten Decimalstelle repräsentirt ist,

berechne man mit Rücksicht auf die entsprechenden in (27) ersichtlichen Bedingungen die Grössen τ_1 und τ_2 in zwei Anfangsstellen. Findet man hiebei

$$(37) \quad (\text{das numerisch grössere } \tau) = \frac{m}{10^{s+1}} + \frac{m'}{10^{s+2}} + \dots$$

so bestimme man dann nach (27) bis auf die $(s+2)$ te Decimalstelle die Werthe :

$$(38) \quad \ddot{x} - x = \alpha, \quad \dot{x} - \ddot{x} = \dot{\alpha}, \quad \ddot{y} - y = \beta, \quad \dot{y} - \ddot{y} = \dot{\beta}$$

und findet etwa

$$(39) \quad \tau_1 = \ddot{x} - x = \tau - \alpha - \dot{\alpha} = \frac{m_1}{10^{k_1+1}} + \frac{m'_1}{10^{k_1+2}} + \dots \quad \text{wobei } \tau = 10^{-n}.$$

$$(39) \quad \tau_2 = \ddot{y} - y = \tau - \beta - \dot{\beta} = \frac{m_2}{10^{k_2+1}} + \frac{m'_2}{10^{k_2+2}} + \dots$$

(40) Sei nun der $[k\text{-Werth des grösseren } \tau \text{ in (39)}] = k + 2n$, so sieht man vor Allem ein, dass wenn etwa im Fall (I) der grössere von den Ausdrücken

$$2 \frac{z_2 Z_1 - z_1 Z_2}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}, \quad -2 \frac{z_1 z_2 + Z_1 Z_2}{Z_1 Z_1 + z_1 z_1}$$

(41) in der Form $\frac{u}{10^{k+1}} + \frac{v}{10^{k+2}} + \dots$ dargestellt wird, dieser Werth sich im Verlaufe der fortschreitenden Rechnung nicht erheblich zu ändern vermag, weil die in diesen Ausdrücken spielenden Grössen z_1, z_2, Z_1, Z_2 keinen erheblichen Änderungen unterworfen sind. Dem zufolge wird auch das hiebei zum Vorschein kommende k in Bezug auf jeden der in (37) ersichtlichen Fälle bei der fortschreitenden Rechnung seinen beinahe ungeänderten Werth beibehalten.

(42) Dieser Auseinandersetzung zu Folge ist es klar, dass die Bestimmungsausdrücke $(\ddot{x} + i\dot{y})$, $(\ddot{x} + i\dot{y})$ der Punkte $\ddot{p}$ und $\ddot{p}$ in Bezug auf die Anfangsstellen der Coordination bis einschliesslich der $(2n+k)$ ten Decimalstelle vollkommen übereinstimmen — und eben in Beziehung auf diese Stellen den wahren Wurzelwerth repräsentiren. In theoretischer Beziehung sollte man das Intervall $[(\ddot{x} + i\dot{y}), (\ddot{x} + i\dot{y})]$ als das aus dem angenommenen Intervall $[(x + iy), (\dot{x} + i\dot{y})]$ abgeleitete engere ansehen. Dies würde jedoch sehr mühsame Rechnungen veranlassen, weil man zur Bestimmung desselben unnöthiger Weise sehr viele Decimalstellen entwickeln müsste, von welchen die späteren über die $(2n+k)$ te Stelle hinausreichenden Decimalstellen der wirklichen Wurzel gar nicht angehören. Mit Hilfe der vorhergehenden Betrachtungen können wir uns ein vollständig abgegrenztes Intervall von der Beschaffenheit ableiten, dass wir in den Bereich desselben bloss diejenigen Decimalstellen ziehen, von welchen wir überzeugt sind, dass selbe der Wurzel wirklich angehören. Die Bestimmung eines solchen Intervalls wird nur so viel Aufwand von Rechnung in Anspruch nehmen, als es die Natur der Sache unumgänglich erfordert.

Bezeichnen wir das neue Intervall mit $[(\ddot{x}) + i(\dot{y})], [(\ddot{x}) + i(\dot{y})]$, so erhalten wir dem Vorhergehenden gemäss zu seiner Bestimmung folgende Relationen :

$$(43) \quad \begin{aligned} (\ddot{x}) &= x + (\ddot{x} - x) \Big|_{2n+k}; & (\ddot{x}) &= (\ddot{x}) + \frac{1}{10^{2n+k}}, \\ (\dot{y}) &= y + (\dot{y} - y) \Big|_{2n+k}; & (\dot{y}) &= (\dot{y}) + \frac{1}{10^{2n+k}}. \end{aligned}$$

Hier ist $(\tau) = \frac{1}{10^{2n+k}}$

(44) in welchen die Ausdrücke $(\ddot{x} - x)$, $(\dot{y} - y)$ nach den der jeweiligen Beschaffenheit der Ausdrücke $z_2 Z_0, Z_2 z_2$ entsprechenden Formeln in (27) zu rechnen sind. Die in (43) ersichtlichen Indices $(2n+k)$ deuten an, dass man bei der Berechnung der Werthe von $(\ddot{x} - x)$, $(\dot{y} - y)$ nur so weit zu gehen habe, bis man die dem Zeiger $(2n+k)$ entsprechende Decimalstelle erreicht hat.

Während man im angenommenen Intervall $(x + iy, \dot{x} + i\dot{y})$ die Intervalldistanz $(\tau + i\tau) = \frac{1+i}{10^n}$ vorausgesetzt hat, erhält man im abgeleiteten Intervall als Intervalldistanz $(\tau) + i(\tau) = \frac{1+i}{10^{2n+k}}$, und es ist klar, dass die Einengung des Wurzelintervalles nur dann als effectiv angesehen werden kann, wenn $2n+k$ wenigstens die Grösse $n+1$ erreicht, wenn somit die Relation

$$n \geq (1-k) \quad (44)$$

in Erfüllung geht. Ist dies der Fall, so gelangt man durch fortgesetzte Rechnung zu immer neuen und neuen Intervallen, welche in ihrer Aufeinanderfolge die Distanzstellenzeiger

$$n, 2n+k, 4n+3k, 8n+7k, 16n+15k, \dots \text{ liefern.}$$

In den Fällen, wo der Betrag $n+k$ bloss eine Einheit oder nur sehr wenige Einheiten beträgt, rathen wir an, die Grösse k bei etwas fortgeschrittener Rechnung nach (39) zu controliren, und dann das neue k der weiteren Rechnung zu Grunde zu legen.

Bei der Auswerthung von $(\ddot{x}-x)$ und $(\ddot{y}-y)$ rechne man den Nenner in $(n+k+1)$ Anfangsstellen genau, und wenn sich hierbei μ als Stellenzeiger der höchsten decadischen Stelle ergibt, beachte man den Stellenzeiger μ' der Anfangsziffer im Zähler und bestimme den Zähler in $(2n+k+\mu-\mu'+1)$ Anfangsstellen, um schliesslich die Grössen bis auf die mit dem Zeiger $(2n+k)$ begabte Schlussstelle genau zu ermitteln. (45)

Bei Beachtung des beschriebenen Verfahrens kann man die complexe Wurzel in beliebig verlangter Anzahl von Decimalstellen ermitteln, sobald man nur bei der Auswerthung der Grössen $Z_0, Z_1, Z_2 \dots z_0, z_1, z_2 \dots$ Sorge trägt, dass die Functionen Z_0 und z_0 schon beim Beginne der Rechnung in so viel decadischen Stellen mehr etwa zwei, genau bestimmt werden, als die Anzahl der decadischen Stellen beträgt, welche man in der zu bestimmenden Wurzel verlangt. Dies wird bei fortgesetzter Rechnungsoperation das Regulativ sein, in wie ferne die übrigen Functionen $Z_1, z_1, Z_2, z_2 \dots$ genau zu rechnen sein werden.

Im Gegensatz zu den complexen Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$f(u) + i\varphi(u) = 0 \quad (46)$$

stehen die eingliedrigen Wurzeln. Diese sind entweder primäre Wurzeln oder secundäre Wurzeln, je nachdem die zugehörigen Wurzelpunkte in der primären Axe ox oder in der secundären Axe oy (47) gelagert erscheinen. Die primären sind die gewöhnlichen mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ begabten Zahlen. Die secundären sind positive oder negative Zahlen, welche neben sich den Factor $i = \sqrt{-1}$ führen.

Soll eine primäre Zahl $= x$ der Gleichung (46) genügen, so kann dies offenbar nicht anders geschehen, als durch die gleichzeitige Erfüllung der Gleichungen:

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0. \quad (48)$$

Man wird zu diesem Zwecke zwischen dem Polynomen $f(x)$ und $\varphi(x)$ das grösste gemeinschaftliche Mass, etwa $\psi(x)$ bestimmen und untersuchen, ob der Gleichung

$$\psi(x) = 0 \quad (49)$$

durch primäre Wurzeln Genüge geleistet werden kann oder nicht. Dann sind die etwaigen primären Wurzeln der Gleichung (49) auch der Gleichung (46) angehörig.

In Bezug auf die Ermittlung der secundären Wurzeln zerlege man die Polynome $f(u)$ und $\varphi(u)$ je in zwei Parteen, von denen die erstere aus Gliedern mit geraden Potenzen von u , die zweite hingegen aus Gliedern mit ungeraden Potenzen von u zusammengesetzt sind. Die betreffende Zertheilung gibt etwa:

$$f(u) = (u^2)_1 + u(u^2)_2, \quad \varphi(u) = [u^2]_1 + u[u^2]_2, \quad \text{hieraus} \quad f(u) + i\varphi(u) = \{(u^2)_1 + u i [u^2]_2\} + i\{[u^2]_1 - u i (u^2)_2\} = 0, \quad (50)$$

Setzt man hier $u = iy$, so erhält man die Gleichung (46) diesfällig in folgender Form :

$$(51) \quad F(y) + i\Phi(y) = 0,$$

welche wieder auf die Nullmachung des den Functionen $F(y)$ und $\Phi(y)$ zukommenden grössten gemeinschaftlichen Masses $\Psi(y)$ führt. Sind etwa $y_1, y_2, y_3, \dots$ die nullmachenden und primären Werthe von $\Psi(y)$, so werden die secundären Werthe $iy_1, iy_2, iy_3, \dots$ als secundäre Wurzeln der Gleichung (46) angehören.

Die Gleichungen (49) und (51) sind bloss mit primären Coëfficienten behaftet, und sind gerade diejenigen, deren primäre Wurzeln uns zur Kenntniss der eingliedrigen Wurzeln der Gleichung (46) verhelfen. Aus diesem Grunde werden wir bloss nöthig haben, eine Methode zur Berechnung der primären Wurzeln bloss für solche Gleichungen zu begründen, welche mit primären Coëfficienten versehen sind.

Sei nun eine mit primären Coëfficienten behaftete Gleichung folgende :

$$(52) \quad A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \dots + A_1 x + A_0 = f(x) = 0.$$

Die Gleichung

$$(53) \quad Z_0 = f(x)$$

bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem $x o Z_0$ stellt eine Curve dar, welche die Axe ox in so viel Punkten schneidet, als primäre Wurzeln der Gleichung (52) zukommen. Descartes war der erste, welcher diese Curve einer näheren Untersuchung unterzog, und eben nach ihm heisst die Linie (53) in Bezug auf die Gleichung (52) die Descartes'sche Curve. Die Durchschnittspunkte dieser Curve mit der Axe ox heissen primäre Wurzelpunkte. Die Distanz eines Wurzelpunktes vom Axenursprunge, gemessen durch die angenommene Einheitslänge, liefert die zugehörige Wurzelzahl selbst.

Lässt man x, Z_0 beziehungsweise in $\dot{x} = x + \Delta x, \dot{Z}_0 = Z_0 + \Delta Z_0$ übergehen, und führt die Bezeichnungen

$$(54) \quad f_s(x) = \frac{d^s f(x)}{dx^s} = s! Z_s$$

ein, so erhält man mit Hilfe der Taylor'schen Reihe und Beibehaltung der Glieder mit Einschluss der 2ten Potenz von Δx :

$$(55) \quad \dot{Z}_0 = Z_0 + Z_1 \Delta x + \overset{m}{Z}_2 \Delta x^2,$$

wo

$$\overset{m}{Z}_2 = f_2(x \dots x + \Delta x) : 2!$$

der bekannten Auffassung des Ergänzungsgliedes entsprechend einen passenden zwischen Z_2 und $\dot{Z}_2$ liegenden Werth andeutet.

Die Gleichung (55) lässt sich auch so schreiben :

$$(56) \quad \dot{Z}_0 - Z_0 = Z_1(\dot{x} - x) + \overset{m}{Z}_2(\dot{x} - x)^2.$$

Betrachtet man hier $\dot{Z}_0$ und $\dot{x}$ als laufende Coordinaten, so stellt (56) eine Parabelcurve dar, welche in dem durch die Coordinaten x, Z_0 bestimmten Punkte P die Descartes'sche Curve in der zweiten Ordnung berührt.

Lässt man in (56) das Glied mit Δx^2 weg, so erhält man :

$$(57) \quad \dot{Z}_0 - Z_0 = Z_1(\dot{x} - x) \dots L_{pt}.$$

Hiedurch ist eine Gerade L_{pt} dargestellt, welche die Descartes'sche Curve in dem über dem Abscissenpunkte $p \dots (\dot{x} = x, \dot{Z}_0 = 0)$ liegenden Punkt P berührt.

Für kleine Werthe von Δx können wir Z_2 und $\overset{m}{Z}_0$ als gleichbezeichnet betrachten, und gelangen in der schon früher gepflogenen Weise aus der Vergleichung der Relationen (55) und (57) zur Überzeugung, dass der in der Descartes'schen Curve liegende Punkt P

$$\begin{aligned} &\text{für } Z_0 Z_2 > 0 \text{ als Convexitätspunkt,} \\ &\text{„ } Z_0 Z_2 < 0 \text{ „ Concavitätspunkt} \end{aligned} \quad (58)$$

angesehen werden soll, weil im gedachten Punkte P die Descartes'sche Curve im ersten Falle ihre convexe, im zweiten Falle hingegen ihre concave Seite der Axe ox zukehrt.

Bevor wir diese Betrachtungen weiter fortsetzen, mögen hier einige für die Zukunft wichtige Bezeichnungen erklärt werden.

Für zwei in ox liegende, durch die Coordinaten x und $\dot{x}$ bestimmte Punkte p , $\dot{p}$ erhalten wir über denselben auf der Descartes'schen Curve die entsprechenden Punkte P , $\dot{P}$.

Eine zu x gehörige, nach (54) zu deutende Functionsreihe $Z_n, Z_{n-1}, Z_{n-2} \dots Z_{r+1}, Z_r, Z_{r-1}$ möge kurzweg durch das Symbol $(x)_{r-1}$ gekennzeichnet werden. Demgemäss erhalten wir den Punkten p und $\dot{p}$ entsprechend:

$$\begin{aligned} (x)_{r-1} &= (Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_r, Z_{r-1}), & (x)_0 &= (Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_2, Z_1, Z_0) \\ (\dot{x})_{r-1} &= (\dot{Z}_n, \dot{Z}_{n-1}, \dots, \dot{Z}_r, \dot{Z}_{r-1}), & (\dot{x})_0 &= (\dot{Z}_n, \dot{Z}_{n-1}, \dots, \dot{Z}_2, \dot{Z}_1, \dot{Z}_0). \end{aligned} \quad (59)$$

Von den Functionswerthen $\dot{Z}_s, \dot{Z}_s$ bezeichnen wir den numerisch grösseren mit Z_s , den numerisch kleineren mit $\dot{Z}_s$.

Den Quotienten, welchen wir erhalten, wenn wir in $(x)_{r-1}$ das letzte Glied durch das mit seinem Zeiger multiplicirte vorletzte Glied dividiren, wollen wir den Orientierungsquotus nennen und mit $\bar{Q}_{r-1}$ bezeichnen. Dies gibt

$$\begin{aligned} \bar{Q}_m &= \frac{Z_m}{(m+1)Z_{m+1}}, & \bar{Q}_{r-1} &= \frac{Z_{r-1}}{r Z_r}, & \bar{Q}_0 &= \frac{Z_0}{1 Z_1} \\ \dot{\bar{Q}}_m &= \frac{\dot{Z}_m}{(m+1)\dot{Z}_{m+1}}, & \dot{\bar{Q}}_{r-1} &= \frac{\dot{Z}_{r-1}}{r \dot{Z}_r}, & \dot{\bar{Q}}_0 &= \frac{\dot{Z}_0}{1 \dot{Z}_1}. \end{aligned} \quad (60)$$

Diese Quotienten sollen gemeine Orientierungsquotienten heissen. Der Quotient $(Z_{r-1}:r Z_r)$ ist mindestens so gross, wie $\bar{Q}_{r-1}$, sonst aber ist er numerisch grösser. Eben so ist der Quotus $(Z_{r-1}:r \dot{Z}_r)$ höchstens so gross, wie $\dot{\bar{Q}}_{r-1}$, sonst aber ist er numerisch kleiner. Der erste heisse starker Orientierungsquotus und wird mit $\bar{Q}_{r-1}$, der zweite hingegen schwacher Orientierungsquotus, und wird mit $\dot{\bar{Q}}_{r-1}$ bezeichnet. Demgemäss können wir folgende Relationen schreiben:

$$\bar{Q}_{r-1} = \frac{Z_{r-1}}{r Z_r}; \quad \dot{\bar{Q}}_{r-1} = \frac{\dot{Z}_{r-1}}{r \dot{Z}_r}. \quad (61)$$

Von den eben angeführten Benennungen und Bezeichnungen werden wir hier wohl einigen Gebrauch machen, — bemerken jedoch, dass in der Fourier'schen Theorie der Gleichungen die Einführung derselben der Belegung und Klarheit der wichtigsten Gesetze sich besonders förderlich erweisen wird.

In der Nähe eines primären Wurzelpunktes können wir die Descartes'sche Curve als eine kleine Partie der berührenden Parabel ansehen. Diese Partie zerfällt in zwei Abtheilungen, welche vom Wurzelpunkt anhebend, die eine oberhalb, die andere unterhalb der Axe ox ihren Verlauf nehmen. Da in diesem kleinen Curvenintervall von der wellenförmigen Krümmung dieser Curve nicht wohl die Rede sein kann, so ist es klar, dass wenn eine dieser Partien als eine Folge von Convexitätspunkten gilt, die andere nothwendig als Folge von Concavitätspunkten angesehen werden muss.

Ist man im Besitze eines in ox liegenden Punktpaares $(p, \dot{p})$, welches ein den Wurzelpunkt gehörig enge einschliessendes Intervall $p\dot{p}$ bildet, so können wir aus diesem Punktpaar ein anderes $(\ddot{p}\ddot{p})$ ableiten, welches auf ein den Wurzelpunkt enger einschliessendes Intervall $\ddot{p}\ddot{p}$ deutet, als dies beim Intervall $p\dot{p}$ der

Fall war. Bezeichnet man mit $\ddot{P}\ddot{P}$ die dem Punktpaare $(\ddot{p}\ddot{p})$ entsprechenden Curvenpunkte, so können wir behaupten, dass von den Paaren $P\ddot{P}$, $\dot{P}\ddot{P}$ das eine auf der convexen, das andere auf der concaven Partie seinen Platz einnimmt.

Ist $Z_2 Z_0 > 0$, so ist P ein Convexitätspunkt und $\dot{P}$ ein Concavitätspunkt. Die in P gelegte Berührende L_{p_t} schneidet die ox in $\ddot{p}$ und veranlasst bezüglich ihrer Punkte P und $\ddot{p}$ folgende Relation:

$$(62) \quad 0 - Z_0 = Z_1(\ddot{x} - x).$$

Bezeichnet man eine durch $\dot{P}$ gelegte, zu L_{p_t} parallele Sekante mit $L_{\dot{p}}$, so wird sie der Axe ox im Punkte $\ddot{p}$ begegnen, und in Bezug auf ihre Punkte $\dot{P}$, $\ddot{p}$ folgende Relation veranlassen:

$$(63) \quad 0 - \dot{Z}_0 = Z_0(\ddot{x} - \dot{x}).$$

Aus (62) und (63) folgt zur Bestimmung von $\ddot{p}$ und $\dot{p}$:

$$(64) \quad \text{für } Z_2 Z_0 > 0 \quad \ddot{x} - x = -\frac{Z_0}{Z_1}; \quad \dot{x} - \ddot{x} = \frac{\dot{Z}_0}{Z_1}.$$

Hier ist nothwendiger Weise $Z_0 Z_1 < 0$, hiemit $Z_2 Z_1 < 0$, und es ist ganz gewiss bei positivem Δx in numerischer Beziehung

$$Z_1 > \dot{Z}_1,$$

hiemit

$$(65) \quad Z_1 = \dot{Z}_1.$$

Ist $Z_2 Z_0 < 0$, so liegen die Punkte $\dot{P}$ und $\ddot{p}$ in $L_{\dot{p}_t}$, und die Punkte P und $\ddot{p}$ in L_p , wobei $L_p // L_{\dot{p}_t}$. Dies gibt

$$0 - \dot{Z}_0 = \dot{Z}_1(\ddot{x} - \dot{x}); \quad 0 - Z_0 = \dot{Z}_1(\ddot{x} - x),$$

hiemit für $Z_2 Z_0 < 0$

$$(66) \quad \ddot{x} - x = -\frac{Z_0}{\dot{Z}_1}; \quad \dot{x} - \ddot{x} = \frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_1}.$$

Aus gleichem Grunde wie früher ist für $Z_2 Z_0 < 0$

$$\dot{Z}_1 = Z_1.$$

Auf Grundlage der in (61) adoptirten Bezeichnung erhalten wir die Resultate aus (64) und (66) in folgender übereinstimmenden Fassung:

$$(67) \quad \text{für } Z_2 Z_0 \geq 0: \quad \ddot{x} - x = -\frac{Z_0}{Z_1}; \quad \dot{x} - \ddot{x} = \frac{\dot{Z}_0}{Z_1},$$

wodurch gesagt wird, dass beim Übergang vom Intervall $p\dot{p}$ zum Intervall $\ddot{p}\ddot{p}$ die Annäherungsgrösse an den Wurzelpunkt dem entsprechenden schwachen Orientierungsquotus gleichkommt.

Der dem Convexitätspunkte entsprechende Orientierungsquotus bildet schon die erforderliche Annäherungsgrösse an den Wurzelpunkt.

Zur Bestimmung der Ausdehnungsgrösse des Intervalls $\ddot{p}\ddot{p} = \tau_x$ findet man mittelst (64) und (66) und nach den hier geltenden Relationen

$$\dot{x} - x = \tau; \quad Z_0 - \dot{Z}_0 = -\tau - \tau^2 \frac{\dot{Z}_2}{Z_1} = -\tau + \tau^2 \frac{\dot{Z}_2}{Z_1},$$

folgende Formeln:

$$(68) \quad \begin{aligned} &\text{für } Z_0 Z_2 > 0 \quad \tau_x = \ddot{x} - \dot{x} = -\tau^2 \frac{\dot{Z}_2}{Z_1}, \\ &\text{" } Z_0 Z_2 < 0 \quad \tau_x = \ddot{x} - \dot{x} = \tau^2 \frac{\dot{Z}_2}{Z_1}, \end{aligned}$$

hiemit in numerischer Beziehung jedesmal

$$\tau_x < \tau^2(Z_2 : Z_1), \quad (69)$$

sobald im Intervall $\dot{p}p$ Z_3 in Bezug auf das Vorzeichen stabil ist, und demgemäss Z_2 den in diesem Intervalle möglichen numerisch grössten Werth repräsentirt.

Ist $\tau = 10^{-n}$, und der numerische Werth von $(Z_2 : Z_1)$ die decadisch aufgefasste Reihe :

$$\left(\frac{m}{10^{k+1}} + \frac{m'}{10^{k+2}} + \dots \right),$$

so erhält man zur Bestimmung des neuen, für weitere Approximation in Verwendung zu nehmenden Intervalls $[(\ddot{x}), (\ddot{x})]$ folgende Relationen :

$$(\ddot{x}) = x + (\ddot{x} - x) \Big|_{2n+k}; \quad (\ddot{x}) = (\ddot{x}) + \frac{1}{10^{2n+k}}, \quad (\tau_x) = \frac{1}{10^{2n+k}} \quad (70)$$

$$\text{wobei } \ddot{x} - x = -\frac{x}{Q_0}$$

Aus den im Verlaufe dieser Untersuchung nach und nach zu Tage geförderten Bemerkungen über die Beschaffenheit der Vorzeichengruppe, welche der Functionsgruppe Z_3, Z_2, Z_1, Z_0 innerhalb des einzuengenden Intervalles entspricht, ergeben sich für die Functionsgruppen :

$$\begin{bmatrix} Z_3, & Z_2, & Z_1, & Z_0 \\ \dot{Z}_3, & \dot{Z}_2, & \dot{Z}_1, & \dot{Z}_0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

folgende acht möglichen Zeichencombinationen :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} + & + & + & - \\ + & + & + & + \end{bmatrix}_1, \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ + & - & + & + \end{bmatrix}_2, \begin{bmatrix} - & + & + & - \\ - & + & + & + \end{bmatrix}_3, \begin{bmatrix} - & - & + & - \\ - & - & + & + \end{bmatrix}_4 \\ & \begin{bmatrix} - & - & - & + \\ - & - & - & - \end{bmatrix}_5, \begin{bmatrix} - & + & - & + \\ - & + & - & - \end{bmatrix}_6, \begin{bmatrix} + & - & - & + \\ + & - & - & - \end{bmatrix}_7, \begin{bmatrix} + & + & - & + \\ + & + & - & - \end{bmatrix}_8 \end{aligned} \quad (72)$$

Eine jede derselben bekundet beim Übergange von Z_3, Z_2, Z_1, Z_0 zu den Functionswerthen $\dot{Z}_3, \dot{Z}_2, \dot{Z}_1, \dot{Z}_0$ je einen Verlust von Einem Zeichenwechsel.

§. 5.

Ausdehnung der gewonnenen Auflösungsprincipien auf mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Es sei :

$$F'(x) = 0, \quad F''(x) = 0, \quad F'''(x) = 0, \dots F^{(n)}(x) = 0 \quad (1)$$

ein System von n algebraisch-numerischen Gleichungen mit n Unbekannten: $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, welche in (1) der leichten Andeutung halber durch den allgemeinen Buchstaben x repräsentirt erscheinen. Die eigentliche Form dieser Gleichungen sei für beliebige Anzahl Striche in Folgendem gegeben:

$$F(x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) + i\varphi(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) = f + i\varphi = 0. \quad (2)$$

Sei zum Zwecke der anzudeutenden Differentiationen

$$D_\mu = \frac{d}{dx_1} \mu_1 + \frac{d}{dx_2} \mu_2 + \dots + \frac{d}{dx_n} \mu_n \quad (3)$$

so findet man folgende, schon an und für sich klare Relationen:

$$(4) \quad D_{-\mu} = -D_{\mu}; \quad D_{\mu} \pm D_{\mu'} = D_{\mu \pm \mu'}; \quad D_{r\mu} = r D_{\mu}.$$

Nach Taylor's Lehrsatz findet man in symbolischer Form:

$$F(x + iy) = (f + i\varphi) e^{iD_y} = Z_0 + iz_0$$

(5) mit den Bestimmungen:

$$Z_0 = f \cos D_y - \varphi \sin D_y; \quad z_0 = f \sin D_y + \varphi \cos D_y$$

ferner

$$(6) \quad F[(x + \tau\xi) + i(y + \tau\eta)] = (Z_0 + iz_0) e^{\tau(D\xi + iD\eta)} = \dot{Z}_0 + i\dot{z}_0 = \\ = (Z_0 + iz_0) + (Z_1 + iz_1)\tau + (Z_2 + iz_2)\tau^2 + \dots, \text{ mit den Bestimmungen:}$$

$$(7) \quad s! Z_s = \left\{ D_{\xi}^s - \binom{s}{2} D_{\xi}^{s-2} D_{\eta}^2 + \dots \right\} Z_0 - \left\{ \binom{s}{1} D_{\xi}^{s-1} D_{\eta} - \binom{s}{3} D_{\xi}^{s-3} D_{\eta}^3 + \dots \right\} z_0$$

$$(7) \quad s! z_s = \left\{ D_{\xi}^s - \binom{s}{2} D_{\xi}^{s-2} D_{\eta}^2 + \dots \right\} z_0 + \left\{ \binom{s}{1} D_{\xi}^{s-1} D_{\eta} - \binom{s}{3} D_{\xi}^{s-3} D_{\eta}^3 + \dots \right\} Z_0$$

$$(8) \quad \dot{Z}_0 = Z_0 + \tau Z_1 + \tau^2 Z_2 + \dots \\ \dot{z}_0 = z_0 + \tau z_1 + \tau^2 z_2 + \dots$$

Lässt man in (6) x, y in $x - \tau\xi, y - \tau\eta$ übergehen, so erhält man:

$$(9) \quad F(x + iy) = (\dot{Z}_0 + i\dot{z}_0) e^{-\tau(D\xi + iD\eta)} = Z_0 + iz_0 = \\ = (\dot{Z}_0 + i\dot{z}_0) - (\dot{Z}_1 + i\dot{z}_1)\tau + (\dot{Z}_2 + i\dot{z}_2)\tau^2 - \dots \text{ mit den Bestimmungen:}$$

$$(10) \quad s! \dot{Z}_s = \left\{ D_{\xi}^s - \binom{s}{2} D_{\xi}^{s-2} D_{\eta}^2 + \dots \right\} \dot{Z}_0 - \left\{ \binom{s}{1} D_{\xi}^{s-1} D_{\eta} - \binom{s}{3} D_{\xi}^{s-3} D_{\eta}^3 + \dots \right\} \dot{z}_0$$

$$(10) \quad s! \dot{z}_s = \left\{ D_{\xi}^s - \binom{s}{2} D_{\xi}^{s-2} D_{\eta}^2 + \dots \right\} \dot{z}_0 + \left\{ \binom{s}{1} D_{\xi}^{s-1} D_{\eta} - \binom{s}{3} D_{\xi}^{s-3} D_{\eta}^3 + \dots \right\} \dot{Z}_0$$

$$(11) \quad Z_0 = \dot{Z}_0 - \tau \dot{Z}_1 + \tau^2 \dot{Z}_2 - \tau^3 \dot{Z}_3 + \dots \\ z_0 = \dot{z}_0 - \tau \dot{z}_1 + \tau^2 \dot{z}_2 - \tau^3 \dot{z}_3 + \dots$$

Aus (7) und (10) ist die Congruenz der Bildungsgesetze ersichtlich.

Die einzelnen Glieder in $F(x)$ können wir in der Form $Hx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ voraussetzen und die jeweilige Summe $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = s$ bestimmen.

Das höchste s bestimmt den Grad des betreffenden Gleichungspolynomes, und man kann versichert (12) sein, dass man von den unendlichen Reihen $\cos D_y, \sin D_y$ die der Form $\frac{D_y^m}{m!}$ angehörigen Glieder nicht weiter zu berücksichtigen haben wird, sobald der betreffende Exponent m sich grösser gestaltet, als der Grad des Gleichungspolynomes Einheiten zählt.

Denken wir uns zwei aufeinander senkrecht stehende Axen ox, oy , und in der betreffenden Ebene irgend eine geschlossene ebene Partie, etwa ein Rechteck mit zu ox, oy parallelen Seiten, dessen Umfangsline keinen Wurzelpunkt, d. h. keinen solchen Punkt beherbergt, dessen entsprechender Bestimmungsausdruck etwa $x_1 + iy_1$ fähig ist, im Verbande der passend gewählten Werthe von $x_2 + iy_2, x_3 + iy_3, \dots, x_n + iy_n$ die in (1) gegebenen Gleichungen gleichzeitig zu erfüllen. Das zugehörige Umgebungsverhältniss auf eine der Gleichungen (1) bezogen, möge mit $Q_{x_1 y_1}$ bezeichnet werden, nachdem man oberhalb Q eine der ins Auge gefassten Gleichung entsprechende Anzahl von Strichen gesetzt sich vorstellt.

Man erhält entsprechend der Gleichung $F'(x) = 0$ das Umgebungsverhältniss im Folgenden:

$$Q'_{x_1 y_1} = \frac{Z'_0}{z'_0} = \frac{f' \cos D_y - \varphi' \sin D_y}{f' \sin D_y + \varphi' \cos D_y}. \quad (13)$$

Für irgend einen angenommenen Umgebungspunkt erhält man in diesem Falle den Werth von $x_1 + iy_1$, auf Grund dieser Werthe von x_1, y_1 bestimme man durch Auflösung der übrigen $(n-1)$ Gleichungen:

$$F''(x) = 0, \quad F'''(x) = 0, \quad F^{(4)}(x) = 0 \dots F^{(n)}(x) = 0 \quad (14)$$

irgend eines der genügenden Werthsysteme von:

$$x_2 + iy_2, \quad x_3 + iy_3, \quad \dots \quad x_n + iy_n$$

und erhält durch Einführung desselben in (13) den anfänglichen, dem Punkte $(x_1 + iy_1)$ entsprechenden Werth von $Q'_{x_1 y_1}$, für den nächsten Punkt $\{[x_1 + \xi_1] + i[y_1 + \eta_1]\}$ erhält man bei gehörig kleinen ξ_1 und η_1 zur Ausmittlung der entsprechenden Werthe von $\xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3, \xi_4, \eta_4 \dots \xi_n, \eta_n$ folgende nach (7) zu deutende und in Bezug auf diese Grössen dem ersten Grad angehörige Gleichungen:

$$Z'_1 = Z''_1 = \dots = Z^{(n)}_1 = \dots z'_1 = z''_1 = \dots = z^{(n)}_1 = 0, \quad (15)$$

aus welchen man geradezu die $(2n-2)$ unbekannten Zusätze $\xi_2, \xi_3 \dots \xi_n, \eta_2, \eta_3 \dots \eta_n$ ziehen, und auf Grund dieser gewonnenen Werthe den Werth des dem nächsten Punkte zugehörigen Umgebungsverhältnisses, nämlich den Werth $Q'_{x_1 + \xi_1, y_1 + \eta_1}$ berechnen kann.

In dieser Weise von einem Umgebungspunkte zum nächsten übergehend, wird man die Anzahl der positiven Mutationen bestimmen, welche der Ausdruck $Q'_{x_1 y_1}$ beim Durchlaufen der ganzen Umgebungslinie darbietet. Aus der halben Anzahl positiver Mutationen wird man auf eben so viele Wurzelpunkte schliessen, welche im Bereiche des von der angenommenen Umgebungslinie eingeschlossenen Raumes enthalten sind. Durch fortschreitenden Übergang zu kleineren und kleineren Partialrechtecken wird es endlich gelingen, die einzelnen Wurzelpunkte von einander zu sondern, und auf diese Weise zu Systemen von angenäherten und zusammengehörigen Werthen von

$$x_1 + iy_1, \quad x_2 + iy_2, \quad x_3 + iy_3, \quad \dots \quad x_n + iy_n$$

zu gelangen, welche den Gleichungen gleichzeitig genügen, und als angenäherte Wurzelsysteme dieser Gleichungen gelten.

Um die sämtlichen Wurzelsysteme der Gleichungen (1) zu erhalten muss man natürlicher Weise jedes der Wurzelsysteme der Gleichungen (14) nach der in (16) beschriebenen, Weise, und zwar mit Rücksicht auf eine gehörig ausgedehnte, um den Axenursprung herum gelegte Umgebungslinie zur Verwendung gelangen lassen, und dann erst durch Übergang zu immer kleineren und kleineren Unterabtheilungen, die im Bereiche der Totalumgebungslinie angedeuteten Wurzelpunkte von einander sondern. (17)

Es ist kaum nöthig zu bemerken, wie man zu verfahren habe, um im Sinne (27) §. 3 die Anzahl der zwischen zwei Parallelen sich vorfindenden Wurzelpunkte zu ermitteln. Auch sieht man ein, dass dieser zur Trennung der Wurzeln vorgeschriebene Weg darauf beruht, dass man die Möglichkeit voraussetzt, die Auflösung von $(n-1)$ Gleichungen vollständig zu bewirken, um hiedurch die Auflösung eines Systemes von n Gleichungen zu vermitteln.

Hieraus leitet sich folgendes Verfahren ab:

Man betrachte den Axenursprung als den Initialpunkt der Umgebungslinien und setze zu diesem Behufe

$$x_2 + iy_2 = x_3 + iy_3 = x_4 + iy_4 = \dots = x_n + iy_n = 0. \quad (18)$$

Löse die Gleichung $F'(x) = 0$ auf Grund der Annahme (18) auf, und findet alle möglichen Werthe des Ausdruckes $(x_1 + iy_1)$. Mit jedem dieser Werthe verfügt man sich zum Durchlaufen der im Axenpunkte

(19) beginnenden Umgebungslinie, um mit Hilfe $Q''_{x_2 y_2}$ die Anzahl der Werthsysteme $[x_1 + iy_1, x_2 + iy_2]$ zu eruiiren, und jedes einzeln anzugeben. Dann wird jedes so erhaltene Werthsystem im Verbande mit der Annahme

$$(20) \quad x_3 + iy_3 = x_4 + iy_4 = \dots = x_n + iy_n = 0$$

die ersten zwei Gleichungen in (1) gleichzeitig erfüllen.

Auf Grund der in (19) und (20) angedeuteten Werthsysteme benütze man den Ausdruck $Q'''_{x_3 y_3}$, um mit Rücksicht auf die im Punkte $x_3 = y_3 = 0$ beginnende Umgebungslinie die Anzahl der Werthsysteme von $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3)$ zu eruiiren, und jedes derselben gesondert darzustellen. Dann wird jedes einzelne im Verbande mit der Fundamentalannahme

$$x_4 + iy_4 = x_5 + iy_5 = \dots = x_n + iy_n = 0$$

den ersten drei Gleichungen in (1) gleichzeitig genügen.

In dieser Weise successive zu den Ausdrücken $Q^{(4)}_{x_4 y_4}, Q^{(5)}_{x_5 y_5}, \dots, Q^{(n)}_{y_n x_n}$ übergehend, gelangt man endlich zu allen möglichen Werthsystemen

$$x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_n + iy_n,$$

deren jedes für sich die Gleichungen (1) gleichzeitig erfüllt und demgemäss ein diesem Gleichungssysteme entsprechendes Wurzelsystem repräsentirt.

Bei einem vorgelegten Systeme von zwei Gleichungen:

$$(21) \quad F(x_1, x_2) = 0, \quad F'(x_1, x_2) = 0$$

betrachte man etwa die zweite derselben als eine Buchstabengleichung, entwickle die Wurzeln derselben $x_2, x'_2, x''_2, x'''_2, \dots$ in convergente, nach den Potenzen von x_1 fortschreitende Reihen, und findet etwa:

$$(22) \quad x_2 = \psi(x_1);$$

man erhält dann für jede Annahme $x_1 = a_1 + ib_1$ sehr leicht $x_2 = a_2 + ib_2$ und wird demgemäss in Bezug auf eine beliebig angenommene Umgebungslinie ermitteln, wie viele positive Mutationen das der ersten der Gleichungen (20) zugehörige Umgebungsverhältniss darbietet. Man erfährt schliesslich die Anzahl der innerhalb der vorgezeichneten Umgebungslinie sich vorfindenden Wurzelpunkte — und in weiterer Folge die entsprechenden Wurzelwerthsysteme selbst.

Der in §. 1 (21) dargelegte Vorgang möge in ähnlicher Weise auch auf das System (1) angedeutet werden.

Es sei

$$(23) \quad x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_n + iy_n$$

ein angenommenes Initialsystem, welches in (1) eingeführt die Substitutionsresultate

$$(24) \quad Z'_0 + iz'_0, Z''_0 + iz''_0, \dots, Z^{(n)}_0 + iz^{(n)}_0$$

liefert. Zur Bestimmung der Zusätze $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ könnte man mit Rücksicht auf den in (7) ersichtlichen Bau der Ausdrücke Z_1 und z_1 folgende in Bezug auf ξ und η lineare Gleichungen aufstellen:

$$(25) \quad Z'_1 + iz'_1 = -\varepsilon'(Z'_0 + iz'_0); \quad Z''_1 + iz''_1 = -\varepsilon''(Z''_0 + iz''_0) \dots Z^{(n)}_1 + iz^{(n)}_1 = -\varepsilon^{(n)}(Z^{(n)}_0 + iz^{(n)}_0)$$

und erhält dann in Folge der so geänderten Initialwerthe:

$$(26) \quad x_1 + \xi_1 + i(y_1 + \eta_1); \quad x_2 + \xi_2 + i(y_2 + \eta_2) \dots x_n + \xi_n + i(y_n + \eta_n)$$

die Substitutionsresultate:

$$(27) \quad \dot{Z}'_0 + i\dot{z}'_0; \quad \dot{Z}''_0 + i\dot{z}''_0; \dots \dot{Z}^{(n)}_0 + i\dot{z}^{(n)}_0.$$

Diese können für gehörig kleine jedoch zweckmässig gewählte Werthe ϵ' , $\epsilon'' \dots \epsilon^{(n)}$ die Eigenschaft erhalten, dass in Bezug auf beliebige in (1) vorgelegte Gleichung die Relation

$$Z_0^2 + z_0^2 > \dot{Z}_0^2 + \dot{z}_0^2 \quad (28)$$

Platz greift. In dieser Weise fortfahrend, gelangt man durch fortgesetzte Correction der als Initialwerthe angesehenen vorhergehenden Werthe zu einem Werthsysteme, für welches die entsprechenden Substitutionsresultate der vorgezeichneten Genauigkeit unbeschadet vernachlässigbare, kleine Werthe annehmen, und welches demgemäss in erster Annäherung als ein den Gleichungen (1) entsprechendes Wurzelsystem selbst angesehen werden kann.

Methode der regulären Einengung der Wurzelwerthe.

Seien

$$S = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \dots x_n + iy_n); \quad \dot{S} = (\dot{x}_1 + i\dot{y}_1, \dot{x}_2 + i\dot{y}_2 \dots \dot{x}_n + i\dot{y}_n) \quad (29)$$

zwei Werthsysteme, deren Wechselbeziehung für beliebige Zeiger in den Gleichungen

$$\dot{x} = x + \tau, \quad \dot{y} = y + \tau, \quad \tau = 10^{-r} \quad (30)$$

bei constanten τ und r charakterisirt werden möge.

Das erste Werthsystem in (29) sei dem wahren Wurzelwerthsystem dermassen angenähert, dass man es aus demselben als abgeleitet sich denken kann, in der Weise, dass man in den x - und y -Werthen des Wurzelwerthsystemes alle mit den Stellenzeigern $-(r+1)$, $-(r+2)$, $-(r+3) \dots$ versehenen Ziffern (31) weglässt. Demgemäss sind die x - und y -Werthe von S sämtlich numerisch kleiner, und die x - und y -Werthe von $\dot{S}$ sämtlich numerisch grösser, als die entsprechenden x - und y -Werthe im Wurzelwerthsysteme $= \mathfrak{S}$. Aus S und $\dot{S}$ wollen wir zwei numerisch mittlere Werthsysteme $\ddot{S}$ und $\ddot{\ddot{S}}$ ableiten, von der Beschaffenheit, dass in Beziehung der numerischen x - und y -Werthe die Relationen

$$S < \ddot{S} < \mathfrak{S} < \ddot{\ddot{S}} < \dot{S} \quad (32)$$

stattfinden.

Die abgeleiteten Werthsysteme können auf folgende Art dargestellt werden:

$$\ddot{S} = (\ddot{x}_1 + i\ddot{y}_1, \ddot{x}_2 + i\ddot{y}_2, \dots \ddot{x}_n + i\ddot{y}_n); \quad \ddot{\ddot{S}} = (\ddot{\ddot{x}}_1 + i\ddot{\ddot{y}}_1, \ddot{\ddot{x}}_2 + i\ddot{\ddot{y}}_2, \dots \ddot{\ddot{x}}_n + i\ddot{\ddot{y}}_n) \quad (33)$$

mit den für beliebige, den y und x angehängte Zeiger geltenden Bestimmungsgleichungen:

$$\ddot{x} = x + \tau \xi; \quad \ddot{\ddot{x}} = \dot{x} - \tau \xi = x + \tau(1 - \xi) \quad (34)$$

$$\ddot{y} = y + \tau \eta; \quad \ddot{\ddot{y}} = \dot{y} - \tau \eta = y + \tau(1 - \eta)$$

$$\ddot{x} - \ddot{\ddot{x}} = \tau(1 - \xi - \xi) = \tau_x; \quad \ddot{y} - \ddot{\ddot{y}} = \tau(1 - \eta - \eta) = \tau_y. \quad (35)$$

Setzt man ausserdem:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0 D_{\xi} - \dot{z}_0 D_{\eta} &= \dot{Z}_1; \quad \dot{Z}_0 (D_{\xi}^2 - D_{\eta}^2) - 2 D_{\xi} D_{\eta} \dot{z}_0 = \dot{Z}_2 \cdot 2 \\ \dot{z}_0 D_{\xi} + \dot{Z}_0 D_{\eta} &= \dot{z}_1; \quad \dot{z}_0 (D_{\xi}^2 - D_{\eta}^2) + 2 D_{\xi} D_{\eta} \dot{Z}_0 = \dot{z}_2 \cdot 2 \end{aligned} \quad (36)$$

und erklärt überhaupt, dass durch die über Z , z gesetzten Striche auf die entsprechenden Werthe von x und y in der durch Z und z ausgedrückten Function hingedeutet wird, dass dagegen die unter Z , z gelegten Striche von den in der Differentiationsdeterminante spielenden ξ und η entlehnt sind, so erhält man in Bezug auf die Systeme $\dot{S}$, $\ddot{S}$, $\ddot{\ddot{S}}$ folgende mit der zweiten Potenz des klein gedachten τ abgeschlossene Relationen:

$$(37) \quad \begin{aligned} \dot{Z}_0 &= Z_0 + \tau \ddot{Z}_1 + \tau^2 \ddot{Z}_2; & \ddot{z}_0 &= z_0 + \tau \ddot{z}_1 + \tau^2 \ddot{z}_2 \\ \ddot{Z}_0 &= \dot{Z}_0 - \tau \ddot{Z}_1 + \tau^2 \ddot{Z}_2; & \ddot{z}_0 &= \dot{z}_0 - \tau \ddot{z}_1 + \tau^2 \ddot{z}_2 \end{aligned}$$

$$(38) \quad \begin{aligned} \dot{Z}_0 &= Z_0 + \tau \dot{Z}_1 + \tau^2 \dot{Z}_2; & \dot{z}_0 &= z_0 + \tau \dot{z}_1 + \tau^2 \dot{z}_2 \\ Z_0 &= \dot{Z}_0 - \tau \dot{Z}_1 + \tau^2 \dot{Z}_2; & z_0 &= \dot{z}_0 - \tau \dot{z}_1 + \tau^2 \dot{z}_2 \end{aligned}$$

Die in (38) unter Z, z angesetzte Ziffer 1 deutet an, dass man in den betreffenden Differentiationsdeterminanten D_ξ, D_η die Grössen ξ und η mit Belassung ihrer Zeichen in numerischer Beziehung mit der Einheit ausgleicht.

Das System der Gleichungen (38) geht somit aus dem System (37) dadurch hervor, dass man in (37) die ξ - und η -Werthe in numerischer Beziehung mit der Einheit ausgleicht. Solche Gleichungssysteme können als zu einer beliebigen Gleichung in (1) gehörig betrachtet werden, wenn man nur rechts oberhalb neben den Buchstaben Z und z eine entsprechende Anzahl Striche setzt.

In der ersten Zeile (37) sind die Werthe $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}$ echte Brüche, und innerhalb Null und denjenigen Werthen variabel zu denken, welche das System $\ddot{S}$ in das System $\ddot{\mathcal{S}}$ umgestalten. Eben so werden die Werthe $\ddot{\xi}$ und $\ddot{\eta}$ innerhalb Null und denjenigen Werthen variabel gedacht, welche den Übergang von $\ddot{S}$ in $\ddot{\mathcal{S}}$ bewirken.

Innerhalb des klein gedachten Intervalls von x, y bis $\dot{x}, \dot{y}$ gehen die Functionen Z_0 und z_0 durch den Nullwerth, und demgemäss können wir mit Rücksicht auf die Auffassung (40) die Relationen

$$(41) \quad \begin{aligned} Z_0 \dot{Z}_0 < 0, & \quad z_0 \dot{z}_0 < 0, & \quad \ddot{Z}_0 \ddot{Z}_0 < 0, & \quad \ddot{Z}_0 Z_0 > 0, & \quad \ddot{Z}_0 \dot{Z}_0 > 0 \\ \ddot{z}_0 z_0 > 0, & \quad \ddot{z}_0 \dot{z}_0 > 0 \end{aligned}$$

einräumen. In weiterer Folge müssen wir zugeben, dass die Grössen $\ddot{Z}_1, \ddot{Z}_1, \ddot{Z}_1, \dot{Z}_1$ ein gemeinschaftliches Vorzeichen besitzen, und dass eben so die Grössen $\ddot{z}_1, \ddot{z}_1, \ddot{z}_1, \dot{z}_1$ gleichbezeichnet sich ergeben müssen.

(42) Auch werden die mit dem Zeiger 2 versehenen Z und z in (37) und (38) mit gleichen Vorzeichen versehen gedacht.

Nun können wir zur Aufstellung der angekündigten Methode der regulären Einengung der Wurzelintervalle schreiten. Die Lösung dieser Aufgabe besteht offenbar in der Angabe von $4n$ wo möglich dem ersten Grade angehörigen Relationen, um aus den bekannten Systemen S und $\dot{S}$ die an das System $\mathcal{S}$ näher liegenden Werthsysteme $\ddot{S}$ und $\ddot{S}$ mittelst der gedachten $4n$ Relationen zu ermitteln. Diese in Bezug auf $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\xi}, \ddot{\eta}$ linearen Gleichungen können wir nicht anderswo her, als aus den Gleichungen (1) beziehen, — und es ist der Natur der Sache gemäss zu erwarten, dass jede der n Gleichungen vier der nöthigen Relationen bieten wird.

Um die Einflussnahme jeder einzelnen in (1) angeführten Gleichung auf die Aufstellung der nöthigen Relationen zu beurtheilen, fassen wir irgend eine dieser Gleichungen, etwa die einstweilen von der Strichmarkirung ledige Gleichung

$$(43) \quad F(x) = 0$$

näher ins Auge, und denken uns bereits im Besitze von $(4n-4)$ der erwähnten Relationen, welche uns die Gleichungen (1) nach Abscheidung der in (43) angeführten geliefert haben. Mittelst solchen Relationen können wir etwa die Grössen $\ddot{\xi}_2, \ddot{\xi}_3, \ddot{\xi}_4 \dots \ddot{\xi}_n, \ddot{\eta}_2, \ddot{\eta}_3, \ddot{\eta}_4 \dots \ddot{\eta}_n$ durch die Grössen $\ddot{\xi}_1, \ddot{\eta}_1$; eben so die Grössen $\ddot{\xi}_2, \ddot{\xi}_3, \ddot{\xi}_4 \dots \ddot{\xi}_n, \ddot{\eta}_2, \ddot{\eta}_3, \ddot{\eta}_4 \dots \ddot{\eta}_n$ durch das Grössenpaar $\ddot{\xi}_1, \ddot{\eta}_1$ ausdrücken und in die zu (43) zugehörigen Gleichungen (37) substituieren. Betrachtet man in Bezug auf ein orthogonales Axensystem die Grössengruppen $(\ddot{Z}_0, \ddot{x}, \ddot{y}), (\ddot{z}_0, \ddot{x}, \ddot{y}), (\ddot{Z}_0, \ddot{x}, \ddot{y}), (\ddot{z}_0, \ddot{x}, \ddot{y})$ als je drei laufende Coordinaten in den betreffenden Gleichungen (37), so stellt sowohl das Gleichungspaar in der ersten Zeile, als auch das Gleichungspaar in

der zweiten Zeile in (37) je ein Flächenpaar vor, nämlich die primäre und secundäre Hilfsfläche der Gleichung (43). Die Punkte (Z_0, x, y) und $(\dot{Z}, \dot{x}, \dot{y})$ befinden sich auf entgegengesetzten Seiten von xoy ; eben so die Punkte (z_0, x, y) und $(\ddot{z}, \ddot{x}, \ddot{y})$.

Nach Weglassung der mit τ^2 versehenen Glieder gehen aus (37) die Gleichungen der Berührungsebenen hervor, deren Richtungen von den Grössen $Z_1, z_1, \dot{Z}_1, \dot{z}_1$ oder vielmehr von den zu $\tau \xi_1, \tau \eta_1, \tau \xi_1, \tau \eta_1$ gehörigen Coefficienten abhängen, welche sich in den Ausdrücken $z_1, Z_1, \dot{z}_1, \dot{Z}_1$ ergeben, sobald man aus denselben mittelst den präsumirten $(4n-4)$ Relationen die mit den Zeigern 2, 3, 4, 5...n versehenen ξ, ξ, η, η wegschafft. Von den Berührungspunkten (Z_0, x, y) und $(\dot{Z}_0, \dot{x}, \dot{y})$ ist immer der eine ein Concavitäts- und der andere ein Convexitätspunkt. Gleiches gilt vom Berührungspunktpaar (z_0, x, y) und $(\dot{z}_0, \dot{x}, \dot{y})$.

Nach den im §. 4 entwickelten Principien wird es nicht schwer fallen, je nach Beschaffenheit der ins Auge gefassten Gleichung (43) zu entscheiden, welche von den vier Berührungspunkten der Concavität, und welche der Convexität angehören, und man wird ohne Mühe von Fall zu Fall der Gleichung (43) entsprechend, jedesmal die vier resultirenden Relationen aufstellen.

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \begin{cases} Z_0 Z_2 > 0 \\ z_0 z_2 > 0 \end{cases} \begin{cases} \tau \dot{Z}_1 + Z_0 = 0; & -\tau \dot{Z}_1 + \dot{Z}_0 = 0; \\ \tau \dot{z}_1 + z_0 = 0; & -\tau \dot{z}_1 + \dot{z}_0 = 0. \end{cases} \\
 \text{(II)} \quad & \begin{cases} Z_0 Z_2 > 0 \\ z_0 z_2 < 0 \end{cases} \begin{cases} \tau \dot{Z}_1 + Z_0 = 0; & -\tau \dot{Z}_1 + \dot{Z}_0 = 0; \\ -\tau \dot{z}_1 + z_0 = 0; & \tau \dot{z}_1 + \dot{z}_0 = 0. \end{cases} \\
 \text{(III)} \quad & \begin{cases} Z_0 Z_2 < 0 \\ z_0 z_2 > 0 \end{cases} \begin{cases} -\tau \dot{Z}_1 + Z_0 = 0; & \tau \dot{Z}_1 + \dot{Z}_0 = 0; \\ \tau \dot{z}_1 + z_0 = 0; & -\tau \dot{z}_1 + \dot{z}_0 = 0. \end{cases} \\
 \text{(IV)} \quad & \begin{cases} Z_0 Z_2 < 0 \\ z_0 z_2 < 0 \end{cases} \begin{cases} -\tau \dot{Z}_1 + Z_0 = 0; & \tau \dot{Z}_1 + \dot{Z}_0 = 0; \\ -\tau \dot{z}_1 + z_0 = 0; & \tau \dot{z}_1 + \dot{z}_0 = 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{44}$$

Man sieht ein, dass man zu denselben Relationen gelangen wird, wenn man zur Bestimmung der Punktfolgen auf den Hilfsflächen nicht die Grössenpaare $(\xi_1, \eta_1), (\ddot{\xi}_1, \ddot{\eta}_1)$, sondern beliebige andere Grössenpaare, etwa $(\xi_s, \eta_s), (\ddot{\xi}_s, \ddot{\eta}_s)$ in Verwendung genommen hätte.

Nach Massgabe der den Producten Z_0, Z_2 und z_0, z_2 gehörigen Zeichencombination liefert auf Grund (44) jede der in (1) vorgelegten Gleichungen je vier lineare, zur Bestimmung von ξ, η, ξ, η hiemit auch zur Bestimmung der Werthsysteme $\dot{S}, \ddot{S}$ dienende Gleichungen, und es bleibt nur noch übrig, die Frage zu beantworten, in wie ferne die neuen Intervallausdehnungen τ_x, τ_y kleiner geworden sind, als die angenommene gemeinschaftliche Intervallausdehnung $\tau = 10^{-r}$.

Zu diesem Behufe erhalten wir aus (35):

$$\begin{aligned}
 Z_0 D\tau_x + z_0 D\tau_y &= \tau(Z_1 - \dot{Z}_1 - \ddot{Z}_1); & \dot{Z}_0 D\tau_x - \dot{z}_0 D\tau_y &= \tau(\dot{Z}_1 - \dot{\dot{Z}}_1 - \dot{\ddot{Z}}_2) \\
 z_0 D\tau_x + Z_0 D\tau_y &= \tau(z_1 - \dot{z}_1 - \ddot{z}_1); & \dot{z}_0 D\tau_x - \dot{Z}_0 D\tau_y &= \tau(\dot{z}_1 - \dot{\dot{z}}_1 - \dot{\ddot{z}}_2)
 \end{aligned} \tag{45}$$

ferner aus (38):

$$\begin{aligned}
 \dot{Z}_0 - Z_0 &= \tau Z_1 + \tau^2 Z_2 = \tau \dot{Z}_1 - \tau^2 \dot{Z}_2 \\
 \dot{z}_0 - z_0 &= \tau z_1 + \tau^2 z_2 = \tau \dot{z}_1 - \tau^2 \dot{z}_2.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Aus der ersten Zeile in (I) findet man mit Rücksicht auf (46):

$$\dot{Z}_0 - Z_0 = \tau(\dot{Z}_1 + Z_1) = \tau Z_1 + \tau^2 Z_2,$$

hiemit :

$$\tau(Z_1 - Z_1 - Z_1) + \tau^2 Z_2 = 0,$$

und schliesslich wegen (45) :

$$Z_0 D\tau_x - z_0 D\tau_y + \tau^2 Z_2 = 0,$$

und durch gleiche Behandlung der zweiten Zeile in (I)

$$(47) \quad z_0 D\tau_x + Z_0 D\tau_y + \tau^2 z_1 = 0.$$

Behandelt man auf diese Weise eine jede Zeile in (44), so erhält man :

$$(48) \quad \begin{aligned} \text{Im Falle (I)} & \dots Z_0 D\tau_x - z_0 D\tau_y + \tau^2 Z_2 = 0, \quad z_0 D\tau_x + Z_0 D\tau_y + \tau^2 z_2 = 0; \\ \text{" (II)} & \dots Z_0 D\tau_x - z_0 D\tau_y + \tau^2 Z_2 = 0, \quad \dot{z}_0 D\tau_x + \dot{Z}_0 D\tau_y - \tau^2 \dot{z}_2 = 0; \\ \text{" (III)} & \dots \ddot{Z}_0 D\tau_x - \dot{z}_0 D\tau_y - \tau^2 \dot{Z}_2 = 0, \quad z_0 D\tau_x + Z_0 D\tau_y + \tau^2 z_2 = 0; \\ \text{" (IV)} & \dots \dot{Z}_0 D\tau_x - \dot{z}_0 D\tau_y - \tau^2 \dot{Z}_2 = 0, \quad \dot{z}_0 D\tau_x + \dot{Z}_0 D\tau_y - \tau^2 \dot{z}_2 = 0. \end{aligned}$$

Es wird somit jede Gleichung in (1) in dem besonderen ihr zukommenden Falle je zwei lineare Gleichungen liefern. Die hieraus resultirenden $2n$ Gleichungen sind geradezu genügend, und die $2n$ Intervalllängen $\tau_{x_1}, \tau_{x_2} \dots \tau_{x_n}, \tau_{y_1}, \tau_{y_2} \dots \tau_{y_n}$ zu berechnen. Setzt man in (48) ganz allgemein :

$$(49) \quad \tau_x = \tau^2 \tau'_x; \quad \tau_y = \tau^2 \tau'_y,$$

so erhält man Gleichungen, aus welchen sich τ^2 wegdividiren lässt. So geht beispielsweise im Fall (I) folgendes Relationspaar zum Vorschein :

$$(50) \quad Z_0 D\tau'_x - z_0 D\tau'_y + Z_2 = 0, \quad z_0 D\tau'_x + Z_0 D\tau'_y + z_2 = 0.$$

Bezeichnet man von den Grössen $\tau'_{x_1}, \tau'_{x_2} \dots \tau'_{x_n}, \tau'_{y_1}, \tau'_{y_2} \dots \tau'_{y_n}$ die numerisch grösste mit τ' , und findet man durch Auflösung der $2n$ Gleichungen etwa :

$$(51) \quad \tau' = \pm \left(\frac{m}{10^{k+1}} + \frac{n}{10^{k+2}} + \dots \right)$$

so erhält man zur Bestimmung der für die weitere Rechnung erforderlichen reducirten Grenzwerthe $(\ddot{x}), (\ddot{x}'), (\ddot{y}), (\ddot{y}')$ folgende Relationen :

$$(52) \quad \begin{aligned} (\ddot{x}) &= x + \xi \Big|_{2r+k}, \quad (\ddot{x}') = (\ddot{x}) + \frac{1}{10^{2r+k}}; \\ (\ddot{y}) &= y + \eta \Big|_{2r+k}, \quad (\ddot{y}') = (\ddot{y}) + \frac{1}{10^{2r+k}}; \end{aligned}$$

und die in dieser Rücksicht richtig gestellte neue Intervallausdehnung :

$$(53) \quad (\tau') = \frac{1}{10^{2r+k}}.$$

Hier gelten überhaupt alle bei ähnlicher Gelegenheit in §. 4 von (36) bis (44) gemachten Bemerkungen.

Die Auflösung der in (1) gegebenen Gleichungen haben wir eigentlich zurückgeführt auf die Auflösung von $2n$ Gleichungen mit $2n$ primär aufgefassten Unbekannten $x_1, x_2, x_3 \dots x_n, y_1, y_2, y_3 \dots y_n$, und erhielten die betreffenden Bestimmungsgleichungen in folgender Form :

$$(54) \quad Z_0' = Z_0'' = Z_0''' = \dots = Z_0^{(n)} = z_0' = z_0'' = z_0''' = \dots = z_0^{(n)} = 0.$$

Sollen die Gleichungen (1) Systeme von eingliedrigen primären oder secundären Wurzeln zulassen, so muss es möglich sein, den $2n$ Gleichungen im ersten Falle bei der Annahme $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n = 0$ durch n primäre Grössen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; im zweiten Falle bei der Annahme $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ durch n secundäre Grössen $y_1, y_2, \dots, y_n$ zu genügen.

Jede der angeführten zwei Eventualitäten ist im Allgemeinen unzulässig, — kann jedoch in speciellen Fällen zum Vorschein kommen, sobald die Gleichungscoefficienten in (1) sich dazu eignen, um die Erfüllung der überschüssigen Bedingungen in (54) herbeizuführen. Demgemäss wird es genügen, die Berechnung der Systeme von primären Wurzeln nur bei Gleichungen mit primären Coefficienten zur Darstellung zu bringen.

Für Systeme von Gleichungen mit primären Coefficienten lässt sich zum Behufe der Trennung ihrer primären Wurzelsysteme die in (17) bis (20) angedeutete Staffelmethode vollkommen in Anwendung bringen, nur mit der hier sich darbietenden Vereinfachung, dass man hier nicht aus dem Verlaufe der Umgebungslinien, sondern bloss aus dem Verlaufe in der Axe ox die Anzahl der Mutationen zu entnehmen hat. Das betreffende Umgebungsverhältniss bildet das jedesmalige neu in den Bereich der Untersuchung gezogene Gleichungspolynom. Die Mutationsstellen bilden hier die Wurzelpunkte selbst, und gleichen sich in Bezug auf die Anzahlen aus.

Auch bezüglich der regulären Einschliessung der primären Wurzelsysteme ist es nicht nothwendig, eine neue Untersuchung einzuleiten, weil die für die Gleichungen (54) begründete und in der Aufstellung der Relationen (44) bestehende Methode geradezu darauf hinausgeht, primäre Wurzelsysteme $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ des mit primären Coefficienten versehenen Gleichungssystems (54) durch reguläre Intervall-einengung mit jeder erwünschten Genauigkeit zu bestimmen.

Die in Bezug auf die Gleichungen (1) einigermaßen speciell gehaltene Bildungsweise in (7) und (8) bietet gegen unsere eben ausgesprochene Behauptung nichts Anstössiges, weil für

$$D = \frac{d}{dx_1} \xi_1 + \frac{d}{dx_2} \xi_2 + \dots + \frac{d}{dx_n} \xi_n + \frac{d}{dy_1} \eta_1 + \frac{d}{dy_2} \eta_2 + \dots + \frac{d}{dy_n} \eta_n$$

eben diese Bildungsweise durch folgende ganz gewöhnliche ersetzt werden kann:

$$s! Z_s = Z_0 D^s, \quad s! z_s = z_0 D^s.$$

Auch wird man nicht aus dem Umstande einen Tadel schöpfen wollen, weil die Aufstellung der Relationen (44) sich auf eine gerade Anzahl Gleichungen basirt, — sobald man bedenkt, dass aus einer jeden Gleichung in (54) insbesondere ohne Rücksicht auf die übrigen sowohl das im gegebenen Falle stattfindende Criterium, als auch das diesem Criterium entsprechende Relationspaar bezogen wird.

Übrigens stellen sich die Gleichungen (1) für $\varphi = 0$ als Gleichungen mit primären Coefficienten dar. Mit Rücksicht auf primäre Wurzelsysteme erhält man $y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n = 0$, $D_y = z_0 = z_1 = \dots = z_n = 0$, die Relationen in (44) werden in der zweiten Zeile identisch erfüllt, die in der ersten Zeile enthaltenen Relationen sind die zur Einengung der primären Wurzelintervalle erforderlichen Bestimmungsgleichungen. Auch von den Gleichungen (48) bleibt von Fall zu Fall in jeder Zeile bloss die erste Gleichung übrig, und dient bloss zur Bestimmung der Intervallabstände $\tau_{x_1}, \tau_{x_2}, \dots, \tau_{x_n}$.

§. 6.

Begründung des Fourier'schen Verfahrens bei der Trennung der primären Wurzeln.

Sei

$$f(x) = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \dots + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 \quad (1)$$

eine mit primären Coefficienten versehene Gleichung.

(Zmurko.)

Wenn man bloß primäre Werthe für x berücksichtigt, so erhält man aus §. 1 (5), (7) für $y = \varphi(x) = 0$, hiemit auch $D = 0$, $\cos D = 1$, $\sin D = 0$:

$$(2) \quad s!Z_s = f_s(x), \quad s!z_s = 0, \quad \text{hiemit } \sigma_s = Z_s, \quad \alpha_s = 0,$$

wo s die Anzahl der Differentiationen andeutet, welche an dem Ausdrücke $f(x)$ zu vollbringen sind.

Aus (1) findet man ganz allgemein:

$$f_{r-s}(x+\rho) = f_{r-s}(x) + f_{r-s+1}(x) \frac{\rho}{1!} + f_{r-s+2}(x) \frac{\rho^2}{2!} + \dots + f_{r-1}(x) \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!} + \&;$$

wenn man in dieser Gleichung die Bezeichnung aus (2) einführt, und ausserdem

$$f_{r-s}(x+\rho) = (r-s)!Z_{r-s}^{x+\rho}$$

setzt, so erhält man:

$$(r-s)!Z_{r-s}^{x+\rho} = (r-s)!Z_{r-s} + \frac{(r-s+1)!}{1!} Z_{r-s+1} \rho + \frac{(r-s+2)!}{2!} Z_{r-s+2} \rho^2 + \dots + \frac{(r-1)!}{(s-1)!} Z_{r-1} \rho^{s-1} + \frac{r!}{s!} Z_r \rho^s + \&$$

und hieraus wegen

$$\frac{(r-s+m)!}{(r-s)!m!} = \binom{r-s+m}{m}$$

$$(3) \quad Z_{r-s}^{x+\rho} = Z_{r-s} + \binom{r-s+1}{1} Z_{r-s+1} \rho + \binom{r-s+2}{2} Z_{r-s+2} \rho^2 + \dots + \binom{r-1}{s-1} Z_{r-1} \rho^{s-1} + \binom{r}{s} Z_r \rho^s + \&$$

Es sei hier Z_r von Null verschieden, und ausserdem mögen mehr successiv aufeinander folgende, mit kleinerem Zeiger als r versehene Z für den in Betracht gezogenen Werth von x Nullwerthe annehmen, so findet man für ein gehörig kleines ρ

$$(4) \quad Z_{r-s}^{x+\rho} = \binom{r}{s} Z_r \rho^s,$$

sobald auch Z_{r-s} im Gefolge der verschwindenden Z sich befindet. Ist auch Z_{r-s+1} für diesen Werth von x mit dem Nullwerthe behaftet, so findet man ebenfalls

$$(5) \quad Z_{r-s+1}^{x+\rho} = \binom{r}{s-1} Z_r \rho^{s-1}, \quad \text{hiemit } Q_{r-s} = \frac{\rho}{s}$$

sobald man unter dem Symbol Q den in §. 4 (60), (61) erklärten Orientierungsquotus versteht.

Denken wir uns die Functionsreihe

$$(6) \quad Z_r, Z_{r-1}, Z_{r-2}, Z_{r-3}, \dots, Z_{r-m}, Z_{r-m-1}$$

mit den zugehörigen Orientierungsquotienten

$$(7) \quad Q_{r-1}, Q_{r-2}, Q_{r-3}, \dots, Q_{r-m}, Q_{r-m-1}$$

von der Beschaffenheit, dass mit Ausnahme der Functionen Z_r und Z_{r-m-1} alle übrigen Functionen in (6) Nullwerthe annehmen. In diesem Falle wird $Q_{r-1} = 0$, $Q_{r-m-1} = \pm \infty$, und alle übrigen Orientierungsquotienten in (7) erscheinen in der Form $\frac{0}{0}$.

Lässt man x in $x+\rho$ übergehen, so erhält man in Folge der angenommenen Beschaffenheit der Functionsreihe (6) und der Relation (5) die in (7) angedeutete Quotientenreihe in folgender Form:

$$(8) \quad \frac{\rho}{1}, \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{3}, \frac{\rho}{4}, \dots, \frac{\rho}{m}, \frac{Z_{r-m-1}}{(r-m) \binom{r}{m} Z_r \rho^m}.$$

Hieraus geht hervor, dass in (7) wegen $\rho = 0$ nur der letzte Orientierungsquotus einen unendlich grossen Werth annimmt, während alle übrigen den Nullwerth erhalten.

Die Reihenfolge der den aufeinanderfolgenden Orientierungsquotienten angehörigen Vorzeichen wollen wir die Orientierungszeichengruppe nennen.

Mit Rücksicht auf ein gerades oder ungerades m , und mit Hinblick auf das Vorzeichen des Quotus $(Z_{r-m-1} : Z_r)$ müssen wir bei der Bildung der Orientierungszeichengruppe in (8) vier Fälle unterscheiden, und man erhält aus (8):

$$\begin{aligned}
 &\text{für } \frac{Z_{r-m-1}}{Z_r} > 0 \text{ und gerades } m \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } x-\rho \quad - - - - \dots - +, \\ \text{„ } x+\rho \quad + + + + \dots + +; \end{array} \right. \\
 &\text{für } \frac{Z_{r-m-1}}{Z_r} > 0 \text{ und ungerades } m \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } x-\rho \quad - - - - \dots - -, \\ \text{„ } x+\rho \quad + + + + \dots + +; \end{array} \right. \\
 &\text{für } \frac{Z_{r-m-1}}{Z_r} < 0 \text{ und gerades } m \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } x-\rho \quad - - - - \dots - -, \\ \text{„ } x+\rho \quad + + + + \dots + -; \end{array} \right. \\
 &\text{für } \frac{Z_{r-m-1}}{Z_r} < 0 \text{ und ungerades } m \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } x-\rho \quad - - - - \dots - +, \\ \text{„ } x+\rho \quad + + + + \dots + -. \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Aus dem vorstehenden Tableau erschen wir folgende Gesetze:

1. Beim Übergang durch die Verschwindungsstelle einer geraden Anzahl consecutiver Z -Functionen ergibt sich jedesmal ein Gewinn von eben so vielen positiven Zeichen in der entsprechenden Orientierungszeichengruppe. (10)
2. Beim Übergang durch die Verschwindungsstelle einer ungeraden Anzahl consecutiver Z -Functionen ergibt sich in der entsprechenden Orientierungsgruppe ein Gewinn von eben so vielen positiven Zeichen mehr oder weniger Einem, je nachdem die verschwindenden Functionen zwischen gleich oder ungleich bezeichneten Grenzfunctionen enthalten sind. (10)

In einer Functionsreihe (6) liefern je zwei Nachbarglieder an die Orientierungszeichengruppe ein negatives oder positives Zeichen ab, je nachdem ihr Vorzeichencomplex sich als ein Zeichenwechsel oder eine Zeichenfolge präsentiert. Demgemäss lassen sich die in (10) ausgesprochenen Gesetze auch auf folgende Weise ausdrücken:

- α) Der Übergang durch die Verschwindungsstelle einer geraden Anzahl von consecutiven Z -Functionen kennzeichnet sich in der entsprechenden Zeichenreihe durch einen Verlust von eben so vielen Zeichenwechseln. (11)
- β) Der Übergang durch die Verschwindungsstelle einer ungeraden Anzahl consecutiver Z -Functionen kennzeichnet sich in der entsprechenden Zeichenreihe durch einen Verlust von eben so vielen Zeichenwechseln mehr oder weniger Einem, je nachdem die verschwindenden Z -Functionen zwischen gleich oder ungleich bezeichneten Grenzgliedern enthalten sind. (11)

Denken wir uns in der Functionsreihe (6) das letzte Glied, nämlich die Function Z_{r-m-1} weg, so wird demgemäss in allen sub (9) angeführten Zeichengruppen das Schlusszeichen wegfallen, und man gelangt auf diese Weise zum folgenden Resultate:

- γ) Der Übergang durch die Verschwindungsstelle einer beliebigen Anzahl consecutiver Endfunctionen gibt sich kund durch den Verlust eben so vieler Zeichenwechsel in der betreffenden Zeichenreihe. (12)
- δ) Der Übergang durch die Verschwindungsstelle einer einzigen zwischen ungleich bezeichneten Nachbarfunctionen liegenden intermediären Z -Functionen übt zufolge β) auf die Anzahl der Zeichenwechsel in der betreffenden Zeichenreihe gar keinen Einfluss aus.

Nachdem wir in der bisherigen Untersuchung genügende Anhaltspunkte gewonnen haben, um den Einfluss des Überganges durch eine Verschwindungsstelle consecutiver Z -Functionen auf die betreffende Functions- als auch auf die Orientierungszeichengruppe gehörig zu würdigen, wollen wir uns bestreben, in einer (13) für die weiteren Zwecke passenden Weise die Frage zu beantworten: von wie viel complexen Wurzeln der Gleichung $Z_{r-m-1} = 0$ der einer solchen Verschwindungsstelle zukommende x -Werth als ein indicatorischer Werth betrachtet werden soll.

Nach der im (4) angedeuteten Weise finden wir für ein sehr kleines ρ :

$$(14) \quad Z_{r-m-1}^{x+\rho} = Z_{r-m-1} + \binom{r}{m+1} Z_r \rho^{m+1} = Z_{r-m-1} \left\{ 1 + \binom{r}{m+1} \frac{Z_r}{Z_{r-m-1}} \rho^{m+1} \right\}.$$

Ist ε eine gehörig kleine positive Grösse, so können wir immerhin ρ der Art bestimmen, dass die Relation

$$\binom{r}{m+1} \frac{Z_r}{Z_{r-m-1}} \rho^{m+1} = -\varepsilon^{m+1}$$

erfüllt wird.

Durch Auflösung dieser Gleichung in Bezug auf ρ finden wir mit Rücksicht auf den Umstand, dass $\frac{Z_r}{Z_{r-m-1}} \leq 0$ sich ergeben kann, folgende Relationen:

$$(15) \quad \text{für } \frac{Z_r}{Z_{r-m-1}} > 0 \dots \rho = (-1)^{\frac{1}{m+1}} \left\{ \frac{Z_{r-m-1}}{\binom{r}{m+1} Z_r} \right\}^{\frac{1}{m+1}} \varepsilon;$$

$$(16) \quad \text{für } \frac{Z_r}{Z_{r-m-1}} < 0 \dots \rho = (+1)^{\frac{1}{m+1}} \left\{ \frac{-Z_{r-m-1}}{\binom{r}{m+1} Z_r} \right\}^{\frac{1}{m+1}} \varepsilon.$$

In jedem dieser Fälle erhalten wir aus (14):

$$Z_{r-m-1}^{x+\rho} = Z_{r-m-1} \{1 - \varepsilon^{m+1}\},$$

hiemit in numerischer Beziehung

$$(17) \quad Z_{r-m-1}^{x+\rho} < Z_{r-m-1}.$$

Da jeder der Ausdrücke $(-1)^{\frac{1}{m+1}}$ und $(+1)^{\frac{1}{m+1}}$ auf eine Anzahl von je $(m+1)$ Werthen hindeutet, so schliessen wir gerade so, wie in §. 1, dass der einer Verschwindungsstelle von m consecutiven Z -Functionen entsprechende x -Werth als Initialwerth von $(m+1)$ Wurzeln der Gleichung

$$(18) \quad Z_{r-m-1} = 0$$

angesehen werden darf, sobald man im Ausdrücke Z_{r-m-1} den Buchstaben x als die Unbekannte ansieht.

Ist nun in (15) m gerade, so ist Einer der $(m+1)$ Werthe von $(-1)^{\frac{1}{m+1}}$ ein negativ-primärer; in diesem Falle ist der betreffende x -Werth ein indicatorischer Werth von m complexen Wurzeln der Gleichung (18). Ist in (15) m ungerade, so ist keiner der $(m+1)$ möglichen Werthe von $(-1)^{\frac{1}{m+1}}$ primär. In (19) diesem Falle indicirt der betreffende x -Werth $(m+1)$ complexe Wurzeln in (18).

Ist in (16) m gerade, so ist Einer der $(m+1)$ möglichen Werthe von $(+1)^{\frac{1}{m+1}}$ ein positiv-primärer, und der betreffende x -Werth indicirt in diesem Falle m complexe Wurzeln in (18).

Ist endlich in (16) m ungerade, so sind zwei der möglichen $(m+1)$ Werthe von $(+1)^{\frac{1}{m+1}}$ primär, und der betreffende x -Werth indicirt in diesem Falle $(m-1)$ Wurzeln in (18).

Ausserdem wissen wir aus der in §. 1 sub (62) niedergelegten Aussage, dass ein indicatorischer x -Werth von complexen Wurzeln in (18) auch als ein indicatorischer x -Werth von eben so vielen complexen Wurzeln der Gleichung

$$Z_0 = f(x) = 0 \quad (20)$$

angesehen werden darf.

Auf Grund der in (19) und (20) niedergelegten Aussagen können wir sehr leicht folgende Gesetze aussprechen :

- $\alpha')$ Ein x -Werth, für welchen eine gerade Anzahl consecutiver Z -Functionen verschwinden, indicirt eben so viele complexe Wurzeln in (20), sobald die Function Z_0 nicht gleichzeitig verschwindet.
- $\beta')$ Ein x -Werth, für welchen eine ungerade Anzahl consecutiver Z -Functionen verschwinden, und der Ausdruck Z_0 von Null verschieden sich ergibt, indicirt in (20) eben so viele complexe Wurzeln mehr oder weniger Eine, je nachdem die verschwindende Functionsgruppe zwischen gleich oder verschieden bezeichneten Z -Functionen enthalten ist.
- $\gamma')$ Ein x -Werth, für welchen eine Anzahl von consecutiven Endfunctionen in der Reihe

$$Z_n, Z_{n-1}, Z_{n-2} \dots Z_3, Z_2, Z_1, Z_0 \quad (21)$$

gleichzeitig verschwinden, indicirt eben so viele unter einander gleiche primäre Wurzeln in (20).

- $\delta')$ Es kann sich auch ereignen, dass in Folge eines x -Werthes an mehreren Stellen der Functionsreihe (21) die Z -Functionen gruppenweise zum gleichzeitigen Verschwinden gelangen; — in diesem Falle ermittle man nach der eben angeführten Vorschrift in Bezug auf jede einzelne Functionsgruppe insbesondere die Anzahl der indicirten Wurzeln und erkläre demgemäss den x -Werth als den indicatorischen Werth der so ermittelten Gesamtzahl der Wurzeln in (20). Hieraus sieht man, dass ein x -Werth unter Umständen gleichzeitig complexe und auch gleiche primäre Wurzeln in (20) indiciren darf, sobald man unter den gleichzeitig verschwindenden Z -Gruppen auch eine Gruppe von consecutiven Endfunctionen in (21) antrifft.

Wir haben die Gesetze $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$, $\alpha')$, $\beta')$, $\gamma')$, $\delta')$ auf Grund der Gleichungen (4) und (14) abgeleitet, und überlassen es dem Leser, dieselben Gesetze aus den allgemeinen Betrachtungen über conjugirte Curvenzweige, und namentlich aus dem Gesichtspunkte des in (18) §. 2 niedergelegten Resultates abzuleiten.

Im Angesichte dieser sub (10) bis (27) §. 2 geführten Untersuchungen sind die in (21) angeführten Gesetze in der Aussicht auf die kleinstmögliche Anzahl der indicirten Wurzeln stipulirt, welche durch die aus den singulären und den Bedingungen

$$Z_{r-1} = Z_{r-2} = Z_{r-3} = \dots = Z_{r-m} = 0$$

entsprechenden Punkten ausgehende conjugirte Curvenzweige angedeutet werden. Im Folgenden soll bethätigt werden, dass die in (21) präliminirte Anzahl der indicirten Wurzeln geradezu die richtige sei, dass somit im Verfolg der genannten Curvenzweige diese Anzahl nicht überschritten werden darf.

Zu diesem Ende denken wir uns die Functionsreihe (21), deren Glieder abwechselnd der geraden und ungeraden Ordnung in Bezug auf die Unbekannte x angehören. Das sub (68), (70) §. 3 bestimmte Intervall $[-L, L]$, welches alle primären Wurzelpunkte der Gleichungen

$$Z_{n-1} = Z_{n-2} = Z_{n-3} = \dots = Z_2 = Z_1 = Z_0 = 0 \quad (24)$$

beherbergt, verwende man dazu, um für alle möglichen Zwischenstellen derselben die in (21) angeführten Z -Functionen auszuwerthen und die jedesmalige Zeichengruppe zu ermitteln. Für $x = -L$ erhält man offenbar eine Zeichengruppe, welche lauter Zeichenwechsel, und zwar in der Anzahl n bietet. Eben so erhält man für $x = L$ eine n Zeichenfolgen bietende Zeichengruppe. Beim Durchschreiten des Intervalls von

— L' gegen L hin gelangt man eventuell theils zu denjenigen Stellen, welche ein gleichzeitiges Verschwinden von Endfunctionen in (21) verursachen, theils zu solchen, welche ein gleichzeitiges Verschwinden von Mittelgruppen, theils endlich zu solchen, welche ein gleichzeitiges Verschwinden von Mittel- und Endgruppen der Functionen dieser Reihe zur Folge haben. In jedem dieser Fälle, und sonst in keinem anderen Falle geht eine nach α), β), γ) bestimmte Anzahl Zeichenwechsel verloren, und niemals wird man in der angedeuteten Richtung das Intervall durchschreitend veranlasst, die verlorenen Zeichenwechsel wieder zu gewinnen. Im Verfolg des ganzen Intervalls gehen n Zeichenwechsel, also gerade so viele Zeichenwechsel in Verlust, (25) als Wurzeln der Gleichung (20) angehören.

Aus γ), γ') ersieht man, dass die Anzahl der primären Wurzeln in (20) blos aus dem nach und nach zum Vorschein kommenden Verschwinden von Endfunctionen ermittelt wird. Die in Verlust gehende, aus dem Verschwinden von Mittelgruppen zu ermittelnde Anzahl von Zeichenwechseln ist immer gerade und entspricht geradezu der Anzahl der complexen Wurzeln in (20). Diese Anzahl wird offenbar durch die nach α), β) eben so gut, wie durch die nach α'), β') zu bemessende Tragweite der indicatorischen x -Werthe gedeckt, — und es darf die erwähnte Tragweite der indicatorischen x -Werthe nicht in der Art beirrt werden, dass man auf Rechnung irgend eines derselben mehr complexe Wurzeln in Anschlag bringt, als es die Gesetze α), β), α'), β') gestatten, weil man sonst im Widerspruche mit der unleugbaren Thatsache zugeben müsste, dass in demselben Maasse irgend ein anderer indicatorischer x -Werth weniger complexe Wurzeln andeuten soll, als er hiezu nach α), β), α'), β') ganz gewiss befähigt und unnachsichtlich berufen ist.

In Erwägung der in (25) mitgetheilten Auseinandersetzung gelten die in α'), β'), γ') angeführten Gesetze (26) nicht nur in Bezug auf die vollständige in (21) vorgeführte Functionsreihe, sondern auch in Bezug auf jede andere Functionsreihe, welche aus (21) durch Weglassung einer beliebigen Anzahl von Endgliedern hervorgeht.

Für $x=0$ stellen in (1) die Coëfficienten

$$(27) \quad 1, A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3} \dots A_2, A_1, A_0$$

eine Reihe dar, welche diesfällig mit (21) dieselbe Zeichengruppe liefert. Die Anzahl der hieraus resultirenden Zeichenfolgen zeigt an, wie viele Zeichenwechsel innerhalb des negativen Intervalls $[-L', 0]$ in Verlust gerathen sind, und gibt kund, dass die Gleichung (1) höchstens eben so viele negativ-primäre Wurzeln besitzen kann. Eben so deutet die Anzahl der in (27) vorfindigen Zeichenwechsel die höchstmögliche Anzahl von positiven Wurzeln an, welche der Gleichung (1) zukommen dürfen. Sind in der Reihe (27) eine oder (28) mehrere abgesonderte Gruppen von je aufeinander folgenden mit Nullwerthen begabten Coëfficienten vorhanden, so erklärt man den Werth $x=0$ als einen indicatorischen x -Werth von Wurzeln, deren Anzahl nach α'), β'), γ') in der gewöhnlichen Weise eruirt wird. Einzelne mit Nullwerth versehene mittlere Coëfficienten tragen zur Indication von complexen Wurzelpaaren nur dann bei, wenn solche zwischen gleichbezeichneten Nachbarcoëfficienten ihre Stelle einnehmen.

Bezeichnen wir, wie in (59) §. 4 die Functionsreihe

$$1, \overset{\alpha}{Z}_{n-1}, \overset{\alpha}{Z}_{n-2} \dots \overset{\alpha}{Z}_{r-1}, \overset{\alpha}{Z}_r$$

mit $[\alpha]_r$, und die Anzahl der dieser Reihe entsprechenden Zeichenwechsel mit $(\alpha)_r$, so deutet für $\beta < \alpha$ der Ausdruck

$$(29) \quad \delta_r = (\beta)_r - (\alpha)_r$$

den Verlust der Zeichenwechsel an, welcher sich beim Übergang von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ in der Functionsreihe $[\alpha]_r$ darbietet.

Für jedes Intervall (α, β) erhält man mit Bezugnahme auf jede Z -Function als Schlussglied der mit $Z_n=1$ beginnenden Reihe die entsprechenden mit δ bezeichneten Indices und zwar in folgender Anordnung:

$$\delta_{n-1}, \delta_{n-2}, \delta_{n-3} \dots \delta_3, \delta_2, \delta_1, \delta_0. \quad (30)$$

Beim Übergange von $[\alpha]_r$ in $[\alpha]_{r-1}$ wird entweder keiner oder Ein Zeichenwechsel gewonnen. Aus diesem Grunde kann die Vergleichung zweier aufeinander folgenden δ bloss eine der folgenden Relationen darbieten:

$$\delta_{r-1} = \delta_r, \quad \delta_{r-1} = \delta_r + 1, \quad \delta_{r-1} = \delta_r - 1. \quad (31)$$

Ist etwa $\delta_r = u$ und $\delta_{r-s} = u + m$, und besitzt keines von den zwischen δ_r und δ_{r-s} liegende δ den Werth u , so kann man behaupten, dass nothwendig

$$\delta_{r-1} = u + 1 \quad (32)$$

sich ergeben muss. Es kann nämlich der Voraussetzung gemäss δ_{r-1} den Werth u nicht annehmen, aber auch nicht den Werth $(u-1)$, weil sonst gegen unsere Voraussetzung dieser Werth beim Anwachsen bis zur Grösse $(u+m)$ durch den Werth u passiren müsste. Dies und das in (31) Angeführte ist genügend, um die Relation (32) zu verbürgen.

Erhält man im Intervall $(\alpha\beta)$ etwa $\delta_r = \delta_{r-1} = 1$, so ist dies ein Zeichen, dass innerhalb des Intervalls $(\alpha\beta)$ eine Wurzel der Gleichung $Z_{r-1} = 0$ und eine Wurzel der Gleichung $Z_r = 0$ enthalten ist. Diese Wurzeln, welche wir etwa mit x_r, x_{r-1} bezeichnen, können nicht einander gleich sein, weil eine diesen Gleichungen gemeinschaftlich angehörende Wurzel gegen die Voraussetzung $\delta_{r-1} = 1$ der Gleichung $Z_{r-1} = 0$ als eine Doppelwurzel angehören müsste. Sind diese Wurzeln verschieden, und etwa $x_r > x_{r-1}$, so kann man sich v als der Relation $x_r > v > x_{r-1}$ genügend vorstellen, und sieht ein, dass in dem engeren Intervall (αv) für $Z_{r-1} = 0$ Eine, und für $Z_r = 0$ gar keine Wurzel in Aussicht steht, das somit in Bezug auf das Intervall (αv) die Indexwerthe $\delta_r = 0, \delta_{r-1} = 1$ sich ergeben müssen. Sollte sich jedoch $x_r < x_{r-1}$ ergeben, und ist v eine zwischen x_r und x_{r-1} liegende Zahl, so wird diesfällig in dem engeren Intervall $(v\beta)$ sich ganz gewiss $\delta_r = 0, \delta_{r-1} = 1$ ergeben. (33)

Es kann sich auch ereignen, dass neben $\delta_{r-1} = 1$ der Index $\delta_r = 2$ sich ergibt, und auf zwei Wurzeln x_r, x_r' hindeutet. Diese Wurzeln können nur primär sein, weil sonst im Widerspruche mit $\delta_{r-1} = 1$ innerhalb des gedachten Intervalles auch für $Z_{r-1} = 0$ zwei complexe Wurzeln indicirt wären. Mag nun die offenbar primäre Wurzel x_{r-1} in das Intervall $(x_r x_r')$ oder ausserhalb dieses Intervalles fallen, so lässt sich im ersten Falle innerhalb $(x_r x_r')$, im zweiten Falle ausserhalb dieses Intervalles ein engeres Intervall $(\alpha'\beta')$ bestimmen, welches die Erscheinung $\delta_r = 0, \delta_{r-1} = 1$ darbietet. (34)

Ist im Intervall $(\alpha\beta)$ $\delta_0 = 2$, so sind in $Z_0 = 0$ zwei Wurzeln x_1, x_2 angedeutet. Sind diese Wurzeln primär und etwa $x_1 > x_2$, ist ferner v eine zwischen x_1 und x_2 liegende Zahl, so besitzt die Gleichung $Z_0 = 0$ in den Intervallen (αv) und $(v\beta)$ je eine primärere Wurzel, und man erhält für jedes derselben $\delta_0 = 1$. Im Intervall $(\alpha\beta)$ kann neben $\delta_0 = 2$ der Index δ_1 höchstens den Werth 3 annehmen. Sind die der Gleichung $Z_0 = 0$ gehörigen Wurzeln x_1, x_2 primär, so wird von den drei in $Z_1 = 0$ angedeuteten Wurzeln Eine ganz gewiss primär und im Intervall (x_1, x_2) enthalten sein, die übrigen zwei dürfen nicht complex sein, weil sonst auch x_1 und x_2 im Widerspruch mit der Voraussetzung complex sein müssten. Es bleibt uns nur übrig, alle drei als primär anzunehmen, es erscheint jedoch nicht zulässig, dass alle drei in das Intervall $(x_1 x_2)$ fallen, denn in diesem Falle können wir uns einen Werth v denken, welcher kleiner ist als die kleinste von den drei Wurzeln in $Z_1 = 0$, und grösser als die kleinste in $Z_0 = 0$, und müssten schliesslich ein Intervall (αv) zugeben, welches im Widerspruche mit (31) die Zeigergruppe $\delta_1 = 3, \delta_0 = 1$ darbietet. Es ist auch nicht gestattet, zuzugeben, dass zwei Wurzeln der Gleichung $Z_1 = 0$ in das Intervall $(x_1 x_2)$ fallen, weil man hiedurch wieder im Widerspruche mit (31) ein Intervall befürworten würde, welches mit Ausschluss der Wurzeln $x_1 x_2$ bloss die zwei Wurzeln der Gleichung $Z_1 = 0$ beherbergt, und demgemäss die Indexgruppe $(\delta_1 = 2, \delta_0 = 0)$ darbietet. Hieraus sieht man ein, dass man das Intervall $(\alpha\beta)$ immerhin durch ein anderes Subintervall ersetzen kann, welches die Zeichengruppe $(\delta_1 = 1, \delta_0 = 2)$ aufweist. (35)

Die angeführten Beweise verbleiben in Kraft, mögen die primären durch $\delta_0 = 2$ angedeuteten Wurzeln x_1, x_2 beliebig nahe an einander gedacht werden, und selbst noch dann, wenn diese Wurzeln unter einander und mit der zwischen ihnen enthaltenen Wurzel der Gleichung $Z_1 = 0$ sich ausgleichen. Das hieraus fließende Ergebniss lässt sich schliesslich auf folgende Weise ausdrücken:

Sind in einem Intervall bloss zwei, und zwar zwei primäre Wurzeln der Gleichung (37) $Z_0 = 0$ angedeutet, so ist entweder schon in diesem Intervall, oder in einem gehörig engeren neben $\delta_0 = 2$ der Index $\delta_1 = 1$ zu gewärtigen.

Es ist klar, dass der in (37) ausgesprochene Satz auf beliebig bezeugte Functionen Z, Z_{r-1} seine Gültigkeit beibehält. Wenn man ausserdem den in (33), (34) ausgesprochenen Satz beherzigt, so gelangt man sehr leicht zu folgender Behauptung:

Sind im Intervall $(\alpha \beta)$ zwei primäre Wurzeln der Gleichung $Z_{r-1} = 0$ angedeutet, so lassen sich entweder durch passende Zerklüftung des Intervalls $(\alpha \beta)$ zwei Intervalle finden, von denen jedes eine Wurzel (38) der Gleichung $Z_{r-1} = 0$ beherbergt und $\delta_{r-1} = 1$ aufweist, oder es wird sich das Intervall $(\alpha \beta)$ durch ein anderes engeres Intervall $(\alpha' \beta')$ ersetzen lassen, welches die Indexgruppe $(\delta_{r+1} = 0, \delta_r = 1, \delta_{r-1} = 2)$ kundgibt.

Sind jedoch im Intervall $(\alpha \beta)$ mittelst $(\delta_0 = 2)$ in $Z_0 = 0$ zwei complexe Wurzeln angedeutet, so entspricht demselben den in (21) ausgesprochenen Gesetzen gemäss ein indicatorischer x -Werth, welcher entweder einer einzelnen von den intermediären Functionen $Z_1, Z_2, Z_3 \dots Z_{n-1}$, etwa der Function Z_r den Nullwerth ertheilt, und gleichzeitig den Nachbarfunctionen Z_{r+1}, Z_{r-1} gleichbezeichnete Werthe beibringt; — oder es verschwinden für diesen x -Werth drei aufeinanderfolgende Z -Functionen, etwa Z_r, Z_{r-1}, Z_{r-2} , während die sich denselben anschliessenden Functionen Z_{r+1}, Z_{r-3} entgegengesetzt bezeichnete Werthe annehmen. In jedem dieser Fälle lässt sich innerhalb $(\alpha \beta)$ ein Partialintervall $(\alpha' \beta')$ bestimmen, welches den indicatorischen x -Werth gehörig eng einschliesst und in Bezug auf Z_{r+1}, Z_r, Z_{r-1} die Indexgruppe $(\delta_{r+1} = 0, \delta_r = 1, \delta_{r-1} = 2)$ zum Vorschein bringt. Falls der indicatorische x -Werth der Function Z_1 den Nullwerth und den Functionen Z_2, Z_0 gleichbezeichnete Werthe ertheilen sollte, wird es nicht schwer sein, ein Partialintervall $(\alpha' \beta')$ zu bestimmen, welches sich durch die Indexgruppe $(\delta_2 = 0, \delta_1 = 1, \delta_0 = 2)$ manifestirt.

Aus (38) und (39) ersehen wir, dass man im Intervall $(\alpha \beta)$ sich darbietende Indexgruppe $(\delta_{r+1} = 0, \delta_r = 1, \delta_{r-1} = 2)$ noch kein Gepräge mit sich führt, ob man die zwei in $Z_{r-1} = 0$ angedeuteten Wurzeln als primäre verschiedene, primäre einander gleiche, oder gar als ein Paar von conjugirten complexen Wurzeln anzusehen habe, weil eben jede dieser Gattungen von Wurzelpaaren fähig ist, die erwähnte Zeichengruppe (40) zu veranlassen. Aus diesem Grunde wird ein solches Intervall ein zweifelhaftes Intervall genannt. Nach Fourier lässt sich zeigen, in welcher Weise die einer derartigen Indexgruppe entsprechenden Functionswerthe Z_{r+1}, Z_r, Z_{r-1} selbst verwendet werden sollen, um ein in dieser Beziehung entscheidendes Kriterium zu gewinnen.

Soll die Zeigergruppe

$$(41) \quad \delta_{r+1} = 0, \quad \delta_r = 1, \quad \delta_{r-1} = 2$$

auf zwei primäre Wurzeln $\dot{x} < \ddot{x}$ der Gleichung $Z_{r-1} = 0$ deuten, so bilde man sich zum Behufe der Auffindung des betreffenden Kriteriums dem Intervall $(\alpha \beta)$ entsprechend die Functionsreihen:

$$(42) \quad [\alpha]_{r-1} = \overset{\alpha}{Z}_{n-1}, \dots \overset{\alpha}{Z}_{r+1}, \overset{\alpha}{Z}_r, \overset{\alpha}{Z}_{r-1}, \quad [\beta]_{r-1} = \overset{\beta}{Z}_{n-1}, \dots \overset{\beta}{Z}_{r+1}, \overset{\beta}{Z}_r, \overset{\beta}{Z}_{r-1}$$

und erhält der Indexgruppe (41) gemäss die Orientirungsquotienten:

$$(43) \quad \begin{aligned} \overset{\alpha}{Q}_{r-1} < 0, \quad \overset{\alpha}{Q}_r < 0; \quad \text{hiemit} \quad \overset{\alpha}{Q}_{r-1} \overset{\alpha}{Q}_r &= (\overset{\alpha}{Z}_{r-1} : r(r+1) \overset{\alpha}{Z}_{r+1}) > 0 \\ \overset{\beta}{Q}_{r-1} > 0, \quad \overset{\beta}{Q}_r > 0 \quad \quad \quad \overset{\beta}{Q}_{r-1} \overset{\beta}{Q}_r &= (\overset{\beta}{Z}_{r-1} : r(r+1) \overset{\beta}{Z}_{r+1}) > 0 \end{aligned}$$

da wegen $d_{r+1} = 0$ Z_{r+1}^{α} und Z_{r+1}^{β} gleichbezeichnet sein müssen, so erscheinen auch Z_{r-1}^{α} und Z_{r-1}^{β} mit gleichen Vorzeichen behaftet. In Bezug auf die Descartes'sche Curve $z = Z_{r-1}$ sind die den Satzungen $x = \alpha$ und $x = \beta$ entsprechenden Curvenpunkte beide Convexitätspunkte, und man erhält demgemäss näherungsweise

$$\dot{x} = \alpha - \dot{Q}_{r-1}^{\alpha}, \quad \ddot{x} = \beta - \dot{Q}_{r-1}^{\beta}, \quad \text{hiemit wegen } \dot{x} < \ddot{x} \quad (44)$$

$$\beta - \alpha > \dot{Q}_{r-1}^{\beta} - \dot{Q}_{r-1}^{\alpha}.$$

Hier sind wegen d_{r-1} die Werthe $\dot{Q}_{r-1}^{\beta}$ und $-\dot{Q}_{r-1}^{\alpha}$ beide positiv und veranlassen in Betreff (44) folgende Aussage:

Sind in einem zweifelhaften Intervall $(\alpha \beta)$ zwei primäre Wurzeln einer Gleichung angedeutet, so muss die Summe der numerischen Werthe der Orientierungsquotienten (45) kleiner ausfallen, als die Längenzahl des Intervalls selbst.

Sind aber die der Indexgruppe (41) entsprechenden Wurzeln der Gleichung $Z_{r-1} = 0$ complex, so ist innerhalb $(\alpha \beta)$ für Z_{r-1} keine Verschwindungsstelle zu erwarten, während die Function Z_r bei der Einengung des Intervalls wegen $d_r = 1$ sich immer mehr und mehr dem Nullwerthe nähert. In diesem Falle gelangt der Orientierungsquotus $Q_{r-1} = Z_{r-1} : r Z_r$ bei gehöriger Einengung des Intervalls zu einer Grösse, welche nicht nur sich mit der entsprechenden Intervalllänge ausgleicht, sondern auch weit über dieselbe hinausragt.

Wenn also eine von den Grössen $-\dot{Q}_{r-1}^{\alpha}$, $\dot{Q}_{r-1}^{\beta}$ oder ihre Summe sich grösser gestaltet, als die betreffende Intervalllänge $(\beta - \alpha)$, so ist dies ein sicheres Kennzeichen, (46)

2) dass die mittelst $d_{r-1} = 2$ angedeuteten Wurzeln der Gleichung $Z_{r-1} = 0$ sich complex gestalten müssen.

Wenn bei der Indexgruppe (41) in Bezug auf $(\alpha \beta)$ das Kriterium (46) nicht eintritt, so erwartet man zwar ein primäres Wurzelpaar in $Z_{r-1} = 0$ und benimmt sich bei Einengung des Intervalls in der Weise, dass man auf die Wurzel der Gleichung $Z_r = 0$ lossteuert, in der Hoffnung, die eventuell möglichen primären Wurzeln der Gleichung $Z_{r-1} = 0$ von einander zu trennen. Ergibt sich in dem neu erhaltenen engeren Intervall die Indexgruppe (41) wieder, und findet das Kriterium (46) nicht statt, so sehe man nach, ob nicht während der Annäherung von Z_r an den Nullwerth gleichzeitig auch Z_{r-1} , und sogar noch rascher sich der Null nähert. Dies veranlasst die Vermuthung, ob nicht etwa das in $Z_{r-1} = 0$ angedeutete Wurzelpaar ein Paar von gleichen Wurzeln ausmacht, — und man wird sich hievon auf folgende Weise überzeugen: (47)

Man suche zwischen Z_r und Z_{r-1} das grösste gemeinschaftliche Mass, — findet man etwa $\varphi(x)$ von der Beschaffenheit, dass demselben innerhalb $(\alpha \beta)$ eine Verschwindungsstelle entspricht, so ist man hiedurch versichert von der Existenz eines Paares gleicher Wurzeln in $Z_{r-1} = 0$. Wenn aber Z_r und Z_{r-1} kein gemeinschaftliches Mass oder etwa ein solches gemeinschaftliches Mass $\varphi(x)$ besitzen, welches innerhalb $(\alpha \beta)$ keine Verschwindungsstelle aufweist, so kann man behaupten, dass die in $Z_{r-1} = 0$ angedeuteten Wurzeln entweder von einander verschiedene primäre sind, oder gar eine complexe Natur besitzen. Durch weiteres Lossteuern auf die Wurzel der Gleichung $Z_r = 0$ gelangt man früher oder später entweder zur Trennung der primären, oder falls solche nicht vorhanden sind, zum entscheidenden Stattfinden des Kriteriums (46).

Ist man bereits auf ein Intervall $(\alpha \beta)$ von der Beschaffenheit gekommen, dass sich in Bezug auf dasselbe die Indexgruppe

$$d_{r+2} = d_{r+1} = 0, \quad d_r = 1, \quad d_{r-1} = 2 \quad (48)$$

einstellt, so lässt sich einerseits die reguläre Berechnung der Wurzel der Gleichung $Z_r = 0$ vornehmen, andererseits könnte man diesfällg an die Stelle der Descartes'schen Curve $z = Z_{r-1}$ eine parabolische

Berührungcurve setzen, welche in Betreff der Natur der mit $\delta_{r-1} = 2$ angedeuteten Wurzeln der Gleichung, wie wir es bald sehen werden, einfache und entscheidende Kriterien bieten wird.

In Bezug auf die Intervallgrenzen α und β erhalten wir zur angenäherten Ermittlung der fraglichen zwei Wurzeln folgende Gleichungen:

$$(49) \quad \bar{Z}_{r-1} + \binom{r}{1} \bar{Z}_r (x - \alpha) + \binom{r+1}{2} \bar{Z}_{r+1} (x - \alpha)^2 = 0; \quad \bar{Z}_{r-1} + \binom{r}{1} \bar{Z}_r (x - \beta) + \binom{r+1}{2} \bar{Z}_{r+1} (x - \beta)^2 = 0.$$

Dividirt man die erste dieser Gleichungen mit $\binom{r+1}{2} \bar{Z}_{r+1}$, die zweite mit $\binom{r+1}{2} \bar{Z}_{r+1}$, so erhält man nach Einführung der Orientierungsquotienten folgende Relationen:

$$(50) \quad (x - \alpha)^2 + 2 \bar{Q}_r (x - \alpha) + 2 \bar{Q}_r \bar{Q}_{r-1} = 0; \quad (x - \beta)^2 + 2 \bar{Q}_r (x - \beta) + 2 \bar{Q}_r \bar{Q}_{r-1} = 0,$$

hieraus zur Angabe der Näherungswerthe von x :

$$(51) \quad x - \alpha = -\bar{Q}_r \pm \sqrt{2 \bar{Q}_r (\frac{1}{2} \bar{Q}_r - \bar{Q}_{r-1})}; \quad x - \beta = -\bar{Q}_r \pm \sqrt{2 \bar{Q}_r (\frac{1}{2} \bar{Q}_r - \bar{Q}_{r-1})}.$$

Wegen $\delta_{r+2} = 0$ behält Z_{r+2} innerhalb $(\alpha \beta)$ ein constantes Vorzeichen, und Z_{r+1} nimmt entweder beständig zu oder beständig ab. Bezeichnet man von den Werthen $\bar{Z}_{r+1}$, $\bar{Z}_{r+1}$ den numerisch grösseren mit Z_{r+1} und den numerisch kleineren mit $\bar{Z}_{r+1}$, so ist ganz gewiss $\bar{Z}_{r+1}$ der numerisch grösste und $\bar{Z}_{r+1}$ der numerisch kleinste derjenigen Werthe, welche Z_{r+1} innerhalb $(\alpha \beta)$ anzunehmen vermag.

Führt man in (49) an die Stelle von $\bar{Z}_{r+1}$ und $\bar{Z}_{r+1}$ die Grösse $\bar{Z}_{r+1}$ ein, so werden die betreffenden Berührungscurven sich in Bezug auf die Descartes'sche Curve $z = Z_{r-1}$ auf der Seite ihrer Concavität lagern, und demgemäss wird die gegen ox convexe Curve $z = Z_{r-1}$ diese Axe um so eher schneiden, sobald man dies von ihren Concavitätsberührungscurven behaupten kann.

Führt man in (49) an die Stelle von $\bar{Z}_{r+1}$, $\bar{Z}_{r+1}$ den Werth $\bar{Z}_{r+1}$ ein, so werden die betreffenden Berührungscurven in Bezug auf die Descartes'sche Curve auf der Seite ihrer Convexität lagern, und demgemäss wird die gegen ox convexe Curve $z = Z_{r-1}$ diese Axe desto weniger treffen, sobald man behaupten kann, dass die Convexitätsberührungscurven mit ox gar nicht zusammenkommen.

Im Fall (52) erhält man:

$$(54) \quad \bar{Z}_r : (r+1) \bar{Z}_r = \bar{Q}_r; \quad \bar{Z}_r : (r+1) \bar{Z}_r = \bar{Q}_r, \quad \text{hiemit} \\ x - \alpha = -\bar{Q}_r \pm \sqrt{2 \bar{Q}_r (\frac{1}{2} \bar{Q}_r - \bar{Q}_{r-1})}; \quad x - \beta = -\bar{Q}_r \pm \sqrt{2 \bar{Q}_r (\frac{1}{2} \bar{Q}_r - \bar{Q}_{r-1})}.$$

Im Fall (53) erhält man auf gleiche Weise:

$$(55) \quad x - \alpha = -\bar{Q}_r \pm \sqrt{2 \bar{Q}_r (\frac{1}{2} \bar{Q}_r - \bar{Q}_{r-1})}; \quad x - \beta = -\bar{Q}_r \pm \sqrt{2 \bar{Q}_r (\frac{1}{2} \bar{Q}_r - \bar{Q}_{r-1})}.$$

Wenn nun in numerischer Beziehung von den Relationen

$$(56) \quad \bar{Q}_{r-1} < \frac{1}{2} \bar{Q}_r, \quad \bar{Q}_{r-1} < \frac{1}{2} \bar{Q}_r$$

wenigstens Eine zutrifft, so wird das betreffende Resultat in (54) sich primär ergeben, die betreffende Concavitätsberührungcurve wird demnach die Axe ox schneiden, und um so eher wird ein Schnitt der Curve

$z = Z_{r-1}$ mit ox erfolgen. In diesem Falle sind die mittelst $\delta_{r-1} = 2$ angedeuteten Wurzeln der Gleichung $Z_{r-1} = 0$ primär.

Wenn dagegen ebenfalls in numerischer Beziehung von den Relationen

$$\overset{\alpha}{Q}_{r-1} > \frac{1}{2} \overset{\alpha}{Q}_r, \quad \overset{\beta}{Q}_{r-1} > \frac{1}{2} \overset{\beta}{Q}_r \quad (57)$$

wenigstens Eine erfüllt wird, so wird das betreffende Resultat in (55) sich in complexer Form ergeben. Die betreffende Convexitätsberührungcurve begegnet der Axe ox gar nicht, und man wird um desto weniger der Curve $z = Z_{r-1}$ eine Begegnung mit ox zumuthen. Man wird schliesslich erklären, dass diesfällige die mittelst $\delta_{r-1} = 2$ angedeuteten Wurzeln ein complexes Wurzelpaar bilden.

Sollte sich jedoch jede der in (56) und (57) angeführten Ungleichheiten in verkehrter Anordnung ergeben, so wird in einem solchen Falle in Betreff der Natur des mittelst $\delta_{r-1} = 2$ angedeuteten Wurzelpaares kein sicherer Schluss gestattet sein. Das betreffende Intervall muss vielmehr durch ein anderes engeres Intervall ersetzt werden, um auf Grundlage des letzteren zur endgiltigen Entscheidung über die Natur dieser Wurzeln zu gelangen.

Fasst man die Orientierungsquotienten bloss in numerischer Beziehung auf, so lassen sich die Gesetze (56) und (57) auf folgende Weise ausprägen:

Ergibt sich im Intervall $(\alpha \beta)$ Einer der Orientierungsquotienten kleiner als die Hälfte des schwachen nächst höher bezeugten Orientierungsquotienten, so sind die mittelst $\delta_{r-1} = 2$ angedeuteten Wurzeln primär.

(B) Ergibt sich im Intervall $(\alpha \beta)$ Einer der Orientierungsquotienten grösser als die Hälfte des starken nächst höher bezeugten Orientierungsquotienten, so sind die mittelst $\delta_{r-1} = 2$ angedeuteten Wurzeln complex.

Auf Grundlage der entwickelten Principien können wir nun zur Aufstellung eines geregelten Verfahrens schreiten, mittelst welchem in einem gegebenen Intervall $(\alpha \beta)$ sowohl die Trennung der primären Wurzeln, als auch die Angabe der indicatorischen x -Werthe der complexen Wurzeln der Gleichung $Z_0 = 0$ zu bewerkstelligen ist.

Ist im Intervall $(\alpha \beta)$ $\delta_0 > 0$, so suche man in der zugehörigen Indexreihe

$$\delta_{n-1}, \delta_{n-2}, \delta_{n-3}, \dots, \delta_2, \delta_1, \delta_0 \quad (59)$$

von Rechts nach Links gehend, das erste δ auf, welches der Einheit gleich kommt, findet man auch auf diese Weise vorgehend, etwa $\delta_r = 1$, so ist man versichert, dass die Trennung der Wurzeln bis auf die Gleichung $Z_r = 0$ bereits gediehen ist. Es kann nämlich die im vorliegenden Intervall liegende Verschwindungsstelle einer oder einiger der Functionen $Z_{n-1}, Z_{n-2}, \dots, Z_{r+1}$ an die Gleichung $Z_r = 0$ und hiemit auch an die Gleichung $Z_0 = 0$ keinen indicatorischen x -Werth bieten, weil sonst im Gegensatze zu $\delta_r = 1$ für die Gleichung $Z_r = 0$ wenigstens zwei complexe Wurzeln in Aussicht ständen.

Neben $\delta_r = 1$ wird sich wegen (32) der Index $\delta_{r-1} = 2$ einfinden. Den Index δ_{r+1} anlangend ist derselbe entweder schon gleich Null, oder er wird mittelst Übergang zu einem Partialintervall $(\alpha' \beta')$ den Nullwerth annehmen, und hiedurch für dieses Intervall $(\alpha' \beta')$ die Indexgruppe $\delta'_{r+1} = 0, \delta'_r = 1$ veranlassen. Die weiteren Indices $\delta'_{r-1}, \delta'_{r-2}, \dots, \delta'_2, \delta'_1, \delta'_0$ anlangend, ist unter denselben entweder keiner der Einheit gleich, und somit $\delta'_{r-1} = 2$, oder man findet unter denselben etwa den Index $\delta'_{r-s} = 1$, welcher in $(\alpha' \beta')$ in dieser Eigenschaft dem Index δ'_0 am nächsten liegt. In den übrigen Partialintervallen $(\alpha \alpha'), (\beta' \beta)$ erhält man ganz gewiss $\delta_r = 0$, und man findet etwa $\delta_{r-s} = 1$ als einen solchen Index, welcher in dieser Eigenschaft dem Index δ_0 am nächsten liegt. Jedenfalls erscheint hier die Separation der Wurzeln und indicatorischer x -Werthe in diejenige Functionsparthe fortgeschoben, deren Z -Functionen lauter unter r stehende Zeiger aufweisen. Bei fortschreitender hier angedeuteter Behandlung sind schliesslich solche Partialintervalle in Aussicht gestellt, deren jedes insbesondere $\delta_0 = 0$ oder $\delta_0 = 1$ aufweist.

Ist jedoch in einem Intervall der Index $\delta_r = 1$ in dieser Eigenschaft an δ_0 der nächste, und die Indexgruppe $\delta_{r+1} = 0$, $\delta_r = 1$, $\delta_{r-1} = 2$ bereits constatirt, so untersuche man mit Hilfe A) und eventuell mittelst B) die Natur des durch $\delta_{r-1} = 2$ angedeuteten Wurzelpaares. Ist dieses Wurzelpaar ein complexes, so ist die mittelst $\delta_r = 1$ angedeutete Wurzel in $Z_r = 0$ der indicatorische Werth eines complexen Wurzelpaares in $Z_0 = 0$; — sind die durch $\delta_{r-1} = 2$ angedeuteten Wurzeln einander gleich, so sehe man nach, ob für diesen Werth von x nicht etwa auch die übrigen Z -Functionen Z_{r-2} , Z_{r-3} , ..., Z_2 , Z_1 , Z_0 gleichzeitig verschwinden, um, wenn dies wirklich eintritt, zu schliessen, dass dieser x -Werth der Gleichung $Z_0 = 0$ als eine $(r+1)$ mal wiederholte Wurzel angehört; bringt jedoch dieser x -Werth nicht die sämtlichen Glieder Z_{r-2} , Z_{r-3} , ..., Z_2 , Z_1 , Z_0 gleichzeitig, sondern bloß partiell zum Verschwinden, so wird man nach $\alpha')$ $\beta')$ $\gamma')$ $\delta')$ ermitteln, wie viel Wurzeln der Gleichung $Z_0 = 0$ durch diesen x -Werth indicirt werden; sind endlich die durch δ_{r-1} angedeuteten zwei Wurzeln primär und verschieden, so zerlege man das vorliegende Intervall in zwei Partialintervalle, deren jedes $\delta_{r-1} = 1$ liefert und nach dem Vorhergehenden der weiteren Behandlung zu unterziehen ist.

Hat man in einem Intervall auf Grund der Indexgruppe ($\delta_{r+1} = 0$, $\delta_r = 1$, $\delta_{r-1} = 2$) bereits entschieden, dass innerhalb desselben die der Gleichung $Z_r = 0$ angehörige Wurzel als indicatorischer x -Werth eines complexen Wurzelpaares sowohl in $Z_{r-1} = 0$, als auch in den Gleichungen $Z_{r-2} = Z_{r-3} = \dots = Z_1 = Z_0 = 0$ zu gelten hat, so ist es gewiss, dass der dieser Indication entsprechende Antheil von je zwei Einheiten in einem jeden der Indices δ_{r-2} , δ_{r-3} , ..., δ_1 , δ_0 enthalten sein muss. Nimmt man diesen Antheil von je zwei Einheiten von jedem der Indices δ_{r-1} , δ_{r-2} , δ_{r-3} , δ_{r-4} , ..., δ_2 , δ_1 , δ_0 weg, so erhält man die neue Indexreihe:

$$0, \delta'_{r-2}, \delta'_{r-3}, \dots, \delta'_2, \delta'_1, \delta'_0$$

welche nach den eben gegebenen Regeln behandelt, zur Entdeckung der übrigen indicatorischen x -Werthe, so wie zur Trennung der etwaigen primären Wurzeln zu dienen hat.

Hat man überhaupt im Intervall $(\alpha\beta)$ mittelst $\delta_{r+1} = 0$, $\delta_r = 1$, $\delta_{r-1} = 2$, ..., $\delta_{r-(2s-1)} = 2s$ entschieden, dass die in diesem Intervall eingeschlossene Wurzel der Gleichung $Z_r = 0$ in den Gleichungen

$$Z_{r-(2s-1)} = Z_{r-2s} = Z_{r-2s-1} = \dots = Z_2 = Z_1 = Z_0$$

je ein System von s complexen Wurzelpaaren andeutet, so ist es gewiss, dass der Antheil von je $2s$ Einheiten in einem jeden der Indices

$$\delta_{r-2s+1}, \delta_{r-2s}, \delta_{r-2s-1}, \dots, \delta_2, \delta_1, \delta_0$$

enthalten sein muss. Nach Wegnahme dieses Antheils von einem jeden dieser Indices erhält man die Indexreihe

$$0, \delta'_{r-2s}, \delta'_{r-2s-1}, \dots, \delta'_2, \delta'_1, \delta'_0$$

welche in bekannter Weise verwendet, zur Ermittlung der übrigen im Intervall $(\alpha\beta)$ befindlichen indicatorischen x -Werthe und auch der primären, der Gleichung $Z_0 = 0$ angehörigen Wurzeln dienen wird.

Beispiele über die Trennung der Gleichungswurzeln findet man in dem Werke von Fourier: „Analyse des équations“, und ausserdem in der encyclopädischen Darstellung der Theorie der Gleichungen von Schnuse. Braunschweig 1850.

A n h a n g.

§. 1.

Über die Auswerthung der Functionsreihe :

$$\left\{ \frac{1}{n!} f_n(x), \frac{1}{(n-1)!} f_{n-1}(x), \dots, \frac{1}{2!} f_2(x), \frac{1}{1!} f_1(x), \frac{1}{0!} f(x) \right\} = [x]_0.$$

Sei

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0, \quad (1)$$

so erhält man mittelst gewöhnlicher Division :

$$f(x) : (x - \alpha) = [a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1] + [a_0 : (x - \alpha)], \quad (2)$$

oder

$$f(x) = \overset{x}{q}_0 (x - \alpha) + a_0$$

mit den Bestimmungsgleichungen :

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \cdot \alpha + A_n \\ a_{n-1} &= a_n \alpha + A_{n-1} \\ &\vdots \\ a_2 &= a_3 \alpha + A_2 \\ a_1 &= a_2 \alpha + A_1 \\ a_0 &= a_1 \alpha + A_0 \quad \text{und} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\overset{x}{q}_0 = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1. \quad (4)$$

Hier ist $\overset{x}{q}_0$ der Quotus und a_0 der Rest und auch das Substitutionsresultat $f(\alpha)$; denn man hat aus (2) $x = \alpha$ setzend

$$f(\alpha) = a_0. \quad (5)$$

Das Anschreiben der in (2) angedeuteten Operation dürfte in Bezug auf ihren Verlauf in der Praxis sehr zweckmässig in folgender Art vor sich gehen :

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) & . & . & . & . & \frac{\alpha}{A_n + A_{n-1} + A_{n-2} + \dots + A_2 + A_1 + A_0} \\ \overset{x}{q}_0 & . & . & . & . & a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + [a_0 \end{array} \quad (6)$$

und die successive Angabe der von links nach rechts gehenden Glieder der zweiten Zeile ergibt sich wegen (3) nach folgender Relation :

$$M_l \cdot \alpha + M_u = M \quad (7)$$

sobald man mit M das eben zu berechnende Glied der zweiten Zeile, mit M_l das schon berechnete dem M links vorangehende, und mit M_u das über M stehende Glied bezeichnet. Diesem Verfahren gemäss kann der Rechner namentlich in dem Falle, wo α einzifferig vorliegt, die zweite Zeile in (6) Glied für Glied ohne Unterbrechung anschreiben, sobald ihm die in der ersten Zeile ersichtliche Coëfficientengruppe vorliegt.

Den Übergang von $f(x)$ zu q_0^x nachahmend, könnte man eben so von q_0^x zu q_1^x , von q_1^x zu $q_2^x \dots$ von q_{n-1}^x zu q_n^x übergehen, und die hier auszuübende Staffeldivision nach (6) in folgendem Schema zusammensetzen:

$$\begin{array}{rcl}
 f(x) & . & . & . & . & \frac{\alpha}{A_n} + A_{n-1} + . & . & . & + A_3 + A_2 + A_1 + A_0 \\
 q_0^x & . & . & . & . & a_n + a_{n-1} + . & . & . & + a_3 + a_2 + a_1 + [a_0 \\
 q_1^x & . & . & . & . & b_n + b_{n-1} + . & . & . & + b_3 + b_2 + [b_1 \\
 q_2^x & . & . & . & . & c_n + c_{n-1} + . & . & . & + c_3 + [c_2 \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 q_{n-2}^x & . & . & . & . & r_n + r_{n-1} + [r_{n-2} \\
 q_{n-1}^x & . & . & . & . & s_n + [s_{n-1} \\
 q_n^x & . & . & . & . & [t_n
 \end{array}
 \quad (8)$$

wo man unter M ein beliebiges Glied im Schema verstehend, durchgehends nach (7) verfährt, um das Schema vollständig auszubauen.

Dem Gesagten zu Folge hat man etwa:

$$\begin{aligned}
 q_2^x &= c_n x^{n-3} + c_{n-1} x^{n-4} + . . . + c_4 x + c_3 \quad \text{und} \\
 q_1^x &= q_2^x (x-\alpha) + c_2, \quad \text{hiemit } q_1^x = c_2, \quad \text{und dann auch} \\
 A_n &= a_n = b_n = c_n = . . . = r_n = s_n = t_n.
 \end{aligned}
 \quad (9)$$

Nachstehend resultiren hieraus die Relationen:

$$\begin{array}{rcl}
 f(x) & = & q_0^x (x-\alpha) + a_0 \\
 q_0^x & = & q_1^x (x-\alpha) + b_1 \\
 q_1^x & = & q_2^x (x-\alpha) + c_2 \\
 . & . & . \\
 . & . & . \\
 q_{n-2}^x & = & q_{n-1}^x (x-\alpha) + s_{n-1} \\
 q_{n-1}^x & = & t_n
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} (x-\alpha)^0 \\ (x-\alpha)^1 \\ (x-\alpha)^2 \\ . \\ . \\ (x-\alpha)^{n-1} \\ (x-\alpha)^n \end{array} \right.
 \quad (10)$$

Multipliziert man die vorstehenden Gleichungen mit den entsprechenden rechts exponirten Potenzen von $(x-\alpha)$, und vereinigt die so multiplicirten Gleichungen in eine Summengleichung, so erhält man:

$$f(x) = t_n (x-\alpha)^n + s_{n-1} (x-\alpha)^{n-1} + r_{n-2} (x-\alpha)^{n-2} + . . . + b_1 (x-\alpha) + a_0. \quad (11)$$

Ist etwa:

$$\varphi(x) = 3x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x - 9 \quad \text{und} \quad \alpha = 2,$$

so ist nach (8)

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 3 + 7 - 6 + 8 - 9 \\
 3 + 13 + 20 + 48 + [87 \\
 3 + 19 + 58 + [164 \\
 3 + 25 + [108 \\
 3 + [31 \\
 [3
 \end{array}$$

hiemit:

$$\varphi(x) = 3(x-\alpha)^4 + 31(x-\alpha)^3 + 108(x-\alpha)^2 + 164(x-\alpha) + 87, \quad (12)$$

und durch Vergleichung mit der Entwicklung des Ausdruckes $\varphi(x)$ nach der Mac Laurin'schen Reihe:

$$\frac{1}{4!} \varphi_4(2) = 3, \quad \frac{1}{3!} \varphi_3(2) = 31, \quad \frac{1}{2!} \varphi_2(2) = 108, \quad \varphi_1(2) = 164, \quad \varphi(2) = 87 \quad (18)$$

und somit ganz allgemein die nach (8) ausgewerthete Functionsreihe $[\alpha]_0$ im Folgenden:

$$[\alpha]_0 = \{t_n, s_{n-1}, r_{n-2}, \dots, c_2, b_1, a_0\}. \quad (13)$$

Sei nun

$$\sigma = \alpha + \beta,$$

so erhält man von der Coefficientenreihe in $[\alpha]_0$ ausgehend, und mit Hilfe β das Schema (8) ausbauend, so wie in (11) etwa:

$$f(x) = t'_n(x-\sigma)^n + s'_{n-1}(x-\sigma)^{n-1} + \dots + c'_2(x-\sigma) + b'_1(x-\sigma) + a'_0 \quad (14)$$

und hieraus

$$[\sigma]_0 = \{t'_n, s'_{n-2}, r'_{n-2}, \dots, c'_2, b'_1, a'_0\}. \quad (15)$$

Zum Resultate (15) würde man auch gelangen mittelst Durchführung einer einzigen Staffeldivision, so bald man von der Coefficientenreihe $A_n, A_{n-1}, \dots, A_2, A_1, A_0$ ausgehend, mit Hilfe σ das Schema (8) ausbaut.

Ist etwa $\alpha = 24.96345$, $\beta = 0.000002457$, hiemit $\sigma = 24.963452457$, und ist man bereits im Besitze der Coefficientengruppe $[\alpha]_0$, so erhält man $[\sigma]_0$ entweder durch den Ausbau des Schema (8) aus $[\alpha]_0$ mittelst β , oder durch Ausbau des Schema aus $\{A_n, A_{n-1}, \dots, A_1, A_0\}$ mittelst σ . Der praktische Rechner wird den ersten dieser Wege aus dem einfachen Grunde vorziehen, weil er im ersten Falle die zahlreichen Multiplicationen mit dem 4ziffrigen Multiplicator β , im zweiten hingegen mit einem 11ziffrigen Factor σ zu bewerkstelligen hat.

Sei nun

$$\begin{array}{rcl}
 x_0 & = & \alpha_0 \\
 x_1 & = & x_0 + \alpha_1 \\
 x_2 & = & x_1 + \alpha_2 \\
 & \vdots & \\
 x_{r-1} & = & x_{r-2} + \alpha_{r-1} \\
 x & = & x_r = x_{r-1} + \alpha_r = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{r-1} + \alpha_r
 \end{array} \quad (16)$$

wobei $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{r-1}, \alpha_r$ die abnehmend geordneten decadischen Wurzelaggregate vorstellen, wie solche in successiver Weise durch die Fourier'sche Methode geboten werden, so wissen wir, dass die Berechnung der Wurzel der successiven Auswerthung der Functionsreihen

$$(17) \quad [x_0]_0, [x_1]_0, [x_2]_0, [x_3]_0 \dots [x_{r-1}]_0, [x_r]_0$$

benöthigt.

Die Ausführung der in (17) angedeuteten Rechnungen kann durch successive Fortbildung der Schemata nach (8) mittelst der Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{r-1}, \alpha_r$ ohne allen Anstand vollführt werden. Man sieht jedoch ein, dass die Bürde der ganzen Rechnung des stufenweisen Vorgangs wegen einem einzigen Rechner zufallen muss.

Im Nächsten soll die Calculation der Functionsreihen (17) in der Art eingeleitet werden, dass hiebei etwa bei der Auswerthung von $[x_s]_0$ mittelst α_s aus der bereits gerechneten Functionsreihe $[x_{s-1}]_0$ sich gleichzeitig mehrere Rechner betheiligen können.

Zu diesem Behufe sei:

$$(18) \quad f(x) = B_n(x-x_{s-1})^n + B_{n-1}(x-x_{s-1})^{n-1} + \dots + B_1(x-x_{s-1}) + B_0, \text{ wo:}$$

$$f_n(x_{s-1}) = n! B_n, f_{n-1}(x_{s-1}) = (n-1)! B_{n-1}, \dots f_2(x_{s-1}) = 2! B_2, f_1(x_{s-1}) = B_1, f(x_{s-1}) = B_0;$$

sei ferner in Bezug auf die zur Berechnung vorliegende Functionsreihe $[x_s]_0$

$$(19) \quad f(x) = B'_n(x-x_s)^n + B'_{n-1}(x-x_s)^{n-1} + \dots + B'_1(x-x_s) + B'_0,$$

so erhält man vor Allem:

$$\frac{f_r(x_s)}{r!} = \frac{f_r(x_{s-1} + \alpha_s)}{r!} = \frac{f_r(x_{s-1})}{r! 0!} + \frac{f_{r+1}(x_{s-1})}{r! 1!} \alpha_s + \frac{f_{r+2}(x_{s-1})^2}{r! 2!} \alpha_s^2 + \dots \text{oder}$$

wegen (18) und (19)

$$B'_r = B_r + \binom{r+1}{1} B_{r+1} \alpha_s + \binom{r+2}{2} B_{r+2} \alpha_s^2 + \dots \text{hiemit}$$

$$(20) \quad B'_r = S \left[\binom{n-\mu}{n-\mu-r} B_{n-\mu} \alpha_s^{n-\mu-r} \right] \dots \mu = 0, 1, 2, 3, \dots (n-r).$$

Bildet man aus der Coëfficientengruppe

$$B_n, B_{n-1}, B_{n-2}, \dots B_2, B_1, B_0$$

die in Bezug auf den Zeiger r reducirte Coëfficientengruppe

$$(21) \quad \frac{B_n}{r}, \frac{B_{n-1}}{r}, \frac{B_{n-2}}{r} \dots \frac{B_2}{r}, \frac{B_1}{r}, \frac{B_0}{r}$$

in der Weise, dass man nach der Formel

$$(22) \quad \binom{m}{m-r} B_m = B_r$$

berechnet, so erhält man aus (20)

$$(23) \quad B'_r = \frac{B_n}{r} \alpha_s^{n-r} + \frac{B_{n-1}}{r} \alpha_s^{n-r-1} + \dots + \frac{B_{r+1}}{r} \alpha_s + B_r.$$

Um also aus $[x_{s-1}]_0$ die Coëfficientengruppe $[x_s]_0$ zu berechnen, können wir die Rechnung derart einrichten, dass gleichzeitig so viel Glieder aus $[x_s]_0$ gerechnet werden, als überhaupt Rechner zur Disposition stehen.

Um etwa $B'_r = \frac{1}{r!} f_r(x_s)$ zu erhalten, betrachte man die auf den Zeiger r reducirte Coefficientenreihe $[x_{s-1}]_0$ als die erste Zeile und rechne dann nach (6) die zweite Zeile. Das letzte Glied der zweiten Zeile ist der Werth von B'_r . (24)

Beide von den oben vorgetragenen Verfahrungsweisen der Auswerthung der Functionsreihe beruhen auf der Bildungsreihe des einfachen in (6) angeführten Schema.

Hier möge noch die constructive Darstellung des Schema (6) folgen.

Sei etwa

$$f(x) = A_5 x^5 + A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0,$$

$$Uy \perp Ux; \text{ im Polygonalzug } 5\ 5'\ 4\ 4'\ 3\ 3'\ 2\ 2'\ 1\ 1'\ 0$$

sei

$$U5 = A_5, \ 5'4 = A_4, \ 4'3 = A_3, \ 3'2 = A_2, \ 2'1 = A_1, \ 1'0 = A_0;$$

$$55' // 33' // 11' // mr;$$

$$44' // 22' \perp mr$$

$$Um = 1, \ \alpha = Ur, \text{ hiemit } \tan \varphi = \alpha.$$

Man findet:

$$U5 = A_5 = a_5$$

$$U4 = U5 \tan \varphi + 5'4 = A_5 \alpha + A_4 = a_4,$$

$$U3 = U4 \tan \varphi + 4'3 = a_4 \alpha + A_3 = a_3,$$

$$U2 = U3 \tan \varphi + 3'2 = a_3 \alpha + A_2 = a_2,$$

$$U1 = U2 \tan \varphi + 2'1 = a_2 \alpha + A_1 = a_1,$$

$$U0 = U1 \tan \varphi + 1'0 = a_1 \alpha + A_0 = a_0;$$

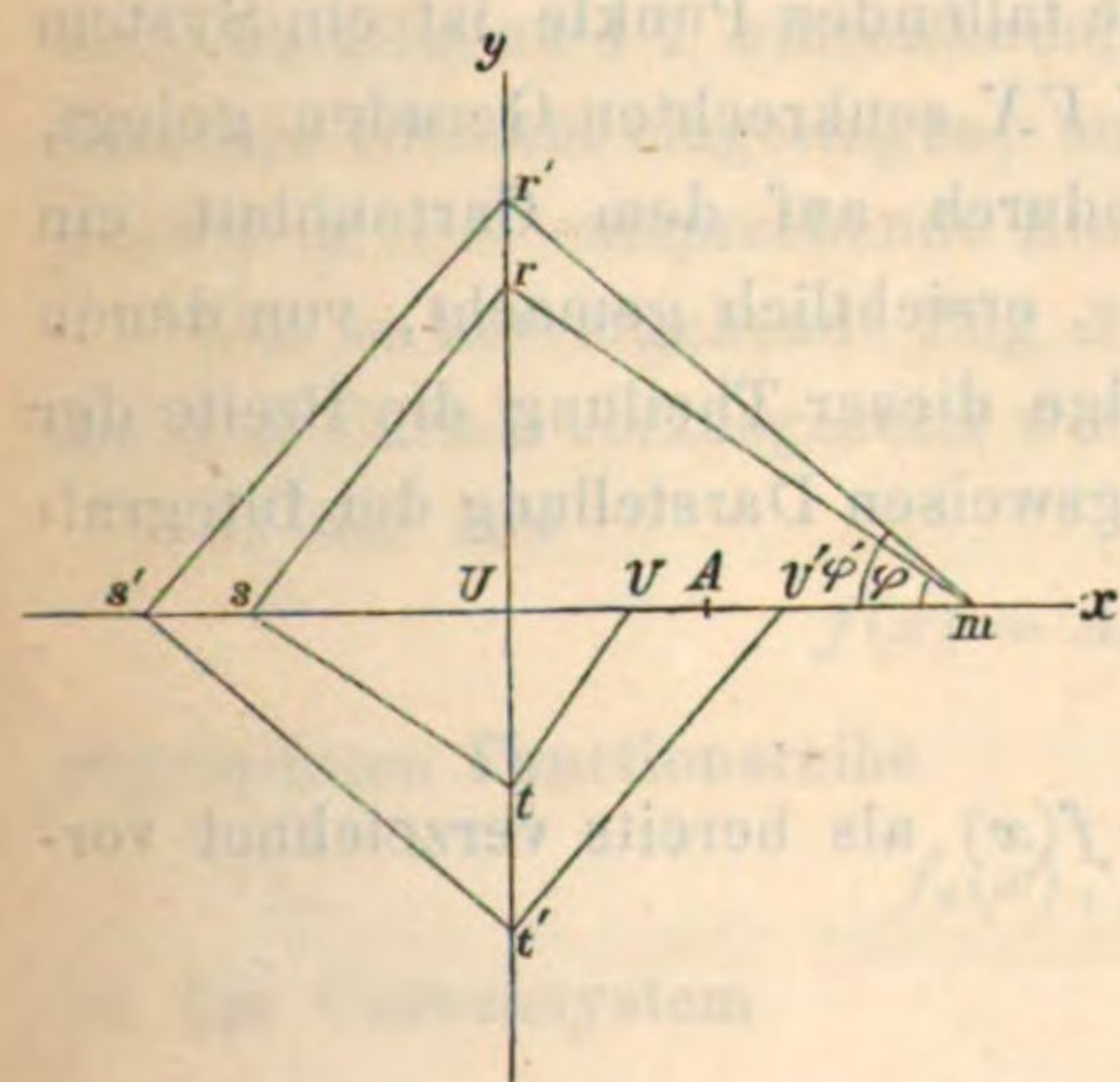
(26)

hieraus $f(\alpha) = U0$, und die Coefficientenreihe des Quotus q_0 :

$$U5, \ U4 \ U3 \ U2 \ U1.$$

(27)

Es lässt sich somit die Auswerthung der Functionsreihen nach beiderlei Methoden auf die in (25) ange-deutete Construction stützen.



Hier sei $UY \perp UX, mr // st \perp rs // tv$;

$$mr' // s't' \perp r's' // t'v'; \quad Um = 1, \quad Ur = \alpha, \quad Ur' = \alpha';$$

$UA = a$, so erhält man:

$$Us = \alpha \tan \varphi = \alpha^2, \quad Ut = \alpha^2 \tan \varphi = \alpha^3;$$

$$Uv = \alpha^3 \tan \varphi = \alpha^4 < a$$

(28)

$$Us' = \alpha' \tan \varphi' = \alpha'^2, \quad Ut' = \alpha'^2 \tan \varphi' = \alpha'^3;$$

$$Uv' = \alpha'^3 \tan \varphi' = \alpha'^4 > a$$

(29)

$$\text{hiemit } \alpha < \sqrt[4]{a} < \alpha'.$$

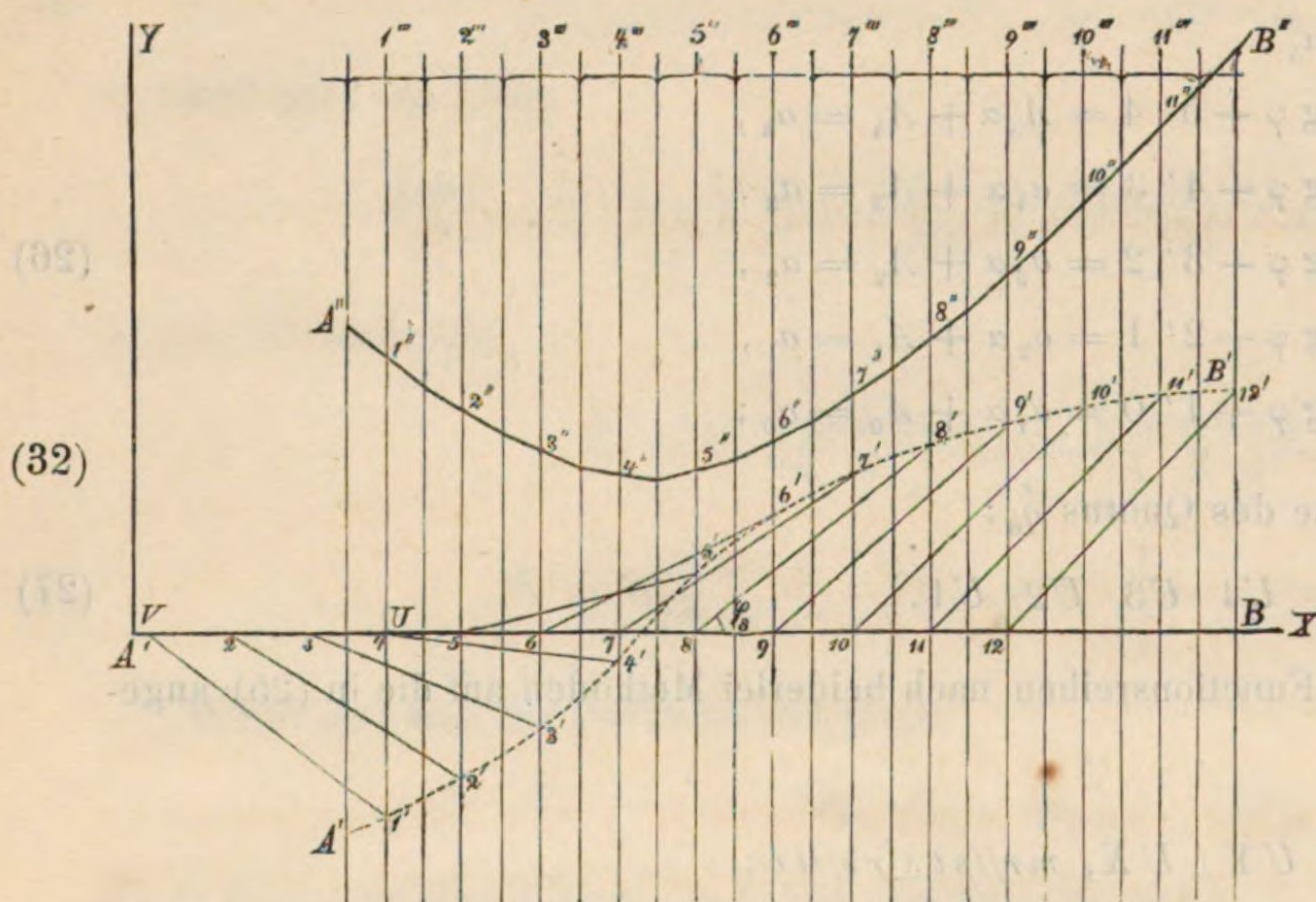
Hieraus ist eine allgemeine sehr einfache constructive Näherungsmethode ersichtlich, mittelst welcher man in den Stand gesetzt ist, die Wurzel einer beliebig hohen Ordnung zwischen zwei einander beliebig nahe Grenzen α und α' einzuschliessen.

In gleicher Weise lässt sich das constructive Verfahren (25) dazu benützen, um näherungsweise die primären (reellen) Wurzeln der algebraischen Gleichungen zu ermitteln.

- (30) Die Construction (25) geht in gleicher Weise vor sich auch in den Fällen, wo einige der Polygonalcoefficienten negativ vorliegen; — nur rathen wir der leichteren Übersicht wegen diejenigen von den in (25) ersichtlichen Punkten $5, 5', 4, 4', 3, 3', 1, 1', 0$, welche als Schlusspunkte negativer von U auslaufender Segmente gelten sollen, etwa durch Klammerfassung $()$ zu kennzeichnen.

Um für das Polygon in (25) das vollständige Schema (8) durch Construction zu bewerkstelligen, müsste man auf Grund der in (27) angedeuteten Coefficientenreihe von $\bar{q}_0^x$ die zu $\bar{q}_1^x$ gehörige Coefficientenreihe bestimmen. Zu einer solchen Construction würden sich etwa zwei Pergamentblätter eignen, deren jedes mit einem fixen orthogonalen Axensysteme bereits versehen ist. Auf dem ersten Blatte (I) findet man wie in (25) den Werth von $f(\alpha)$ und die Coefficienten von $\bar{q}_0^x$; auf dem zweiten Blatte (II) von den in (I) ersichtlichen zu $\bar{q}_0^x$ gehörigen Coefficienten ausgehend, findet man den Werth von $\frac{1}{1!}f_1(\alpha)$ und die Coefficienten zu $\bar{q}_1^x$. — Jetzt wasche man in (I) die Zeichnung ab, und erhält hiedurch Platz, um auf derselben mit Hilfe (II) den Werth von $\frac{1}{2!}f_2(\alpha)$ und die zu $\bar{q}_2^x$ gehörigen Coefficienten zu construiren. Man gelangt so durch abwechselnde Benützung der Tafeln (I) und (II) zur Construction der vollständigen Functionsreihe.

Angenäherte Darstellung der Functionsreihe durch ein entsprechendes Curvensystem.



Die Unterlage in der nebenstehenden Figur bildet ein festes Cartonblatt, auf welchem hier $VU = 1$ der Deutlichkeit wegen in drei gleiche Theile $12 = 23 = 34$ abgetheilt ist. In praktischen Fällen wird es zweckdienlicher sein, wenn man die Einheit in eine grössere Anzahl gleicher Theile abtheilt. Auf der Grundaxe VX ist die erwähnte Theilung weiter fortgesetzt und mittelst Marken $1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12, 13, 14, \dots$ ersichtlich gemacht. Durch die so markirten Punkte und ausserdem durch die zwischen je zwei Nachbarmarken in die Mitte fallenden Punkte ist ein System von auf VX senkrechten Geraden gelegt, und hiedurch auf dem Cartonblatt ein

System von gleich breiten Feldern $1'', 2'', 3'', \dots, 10'', 11'', 12'' \dots$ ersichtlich gemacht, von denen das erste $1''$ den Einheitspunkt U in seiner Mitte beherbergt. Ist in Folge dieser Theilung die Breite der Felder gehörig klein, so kann ein so präparirtes Cartonblatt zur näherungsweisen Darstellung der Integralfunction

$$Y = \int f(x) dx + C$$

- (31) mittelst eines continuirlichen Zuges dienen, sobald man die Curve $y = f(x)$ als bereits verzeichnet voraussetzt.

Zu diesem Zwecke wird die Curve

$$(33) \quad y = f(x)$$

auf ein durchsichtiges Papierblatt (Strohpapier) sammt dem dieser Curve zu Grunde liegenden orthogonalen Axensystem XAY abgepaust und dann auf das eben beschriebene Cartonblatt so aufgelegt, dass AX auf

die Gerade VX zu liegen kommt, und dass der in der Curve (32) angenommene Ausgangspunkt $1'$ in die durch U gehende auf VX senkrechte Gerade hineinfällt. Von da an ergibt sich die Markirung der in (32) liegenden Punkte $2', 3', 4' \dots 10', 11', 12', 13', \dots$ von selbst. In der Figur ist die Curve (32) kurz durch $A'B'$ angedeutet.

Zum Behufe der allgemeinen Darstellung der Richtung der Geraden

$$V1', 22', 33', 44', \dots 88', 99', 1010', 1111', \dots \quad (34)$$

sei φ_8 der Winkel, welchen etwa die Gerade $88'$ mit AX einschliesst; sei ferner $A, 11 = x_8$ und $11, 8' = y_8$ das dem Punkte $8'$ zugehörige Coordinatenpaar, so erhält man wegen (32)

$$y_8 = f(x_8), \text{ und } \tan \varphi_8 = \frac{11, 8'}{8, 11} = \frac{y_8}{x_8} = f(x_8), \text{ hiemit allgemein} \quad (35)$$

$$\tan \varphi = f(x).$$

Aus der zur Integralcurve zugehörigen Gleichung

$$Y = \int f(x) dx + C \quad (36)$$

erhält man $\frac{dY}{dx} = f(x)$, hiemit wegen (33)

$$\tan \varphi = \frac{dY}{dx}. \quad (37)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass in den zu

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots$$

gehörigen Punkten der Integralcurve, den berührenden Geraden beziehungsweise die Winkel

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots \varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \dots$$

entsprechen werden.

Bei gehörig schmalen Feldern kann man näherungsweise zugeben, dass jedes einzelne Feld von der Integralcurve geradlinig bestrichen wird, und dass das eben diesem Felde entsprechende nun geradlinige Curvenelement ein Stück derjenigen Berührenden ausmachen wird, welche dem in dieses Feld fallenden Punkte der Integralcurve entspricht. Demgemäss wird etwa das in das Feld $8'''$ fallende Curvenelement mit Ax den Winkel φ_8 einschliessen, und somit zur Geraden $88'$ parallel liegen.

Sei nun auf irgend eine Weise die Lage des Punktes $1''$ gegeben, so kann man in das Feld $1'''$ das Element parallel zu $11'$ einzeichnen; vom Endpunkte dieses Elementes wird in das Feld $2'''$ das nächste zu $22'$ parallele Element eingetragen, und man wird diese Operation so weit fortsetzen, bis man das dem Schlusspunkte in $A'B'$ entsprechende Element in das entsprechende Feld eingetragen hat.

Der so hervorgehende Zug $A''B''$ wird die Integralcurve desto besser darstellen, je schmaler die Felder auf dem Carton vorausgesetzt werden.

In der aus

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0 \quad (38)$$

abgeleiteten Functionsreihe

$$f_n(x), f_{n-1}(x), f_{n-2}(x) \dots f_3(x), f_2(x), f_1(x), f(x) \quad (39)$$

ist das Curvensystem

$$y = f_{n-1}(x), y = f_{n-2}(x), y = f_{n-3}(x) \dots y = f_2(x), y = f_1(x), y = f(x) \quad (40)$$

angedeutet, und man sieht, dass jede dieser Curven in Bezug auf die links vorangehende als eine Integralcurve angesehen werden kann, und nach (32) zur Darstellung gelangt, sobald die vorangehende bereits

verzeichnet ist. Die erste in (40) ist eine zur Axe AX schief geneigte Gerade, die zweite eine Parabelcurve des zweiten Grades — von dieser weiter fortgehend gelangt man endlich zur Darstellung der Schlusscurve $y=f(x)$.

Die Stellen des angenommenen Zeichnungsintervalls, wo von der Curve $y=f(x)$ die Axe AX geschnitten wird, bilden in angenäherter Weise die primären Wurzelpunkte der Gleichung (38). Dasselbe lässt sich von jeder anderen Curve in (40) behaupten.

Beginnt das Intervall im Punkte $(x=\alpha, y=0)$, so ermittle man die Grössenreihe

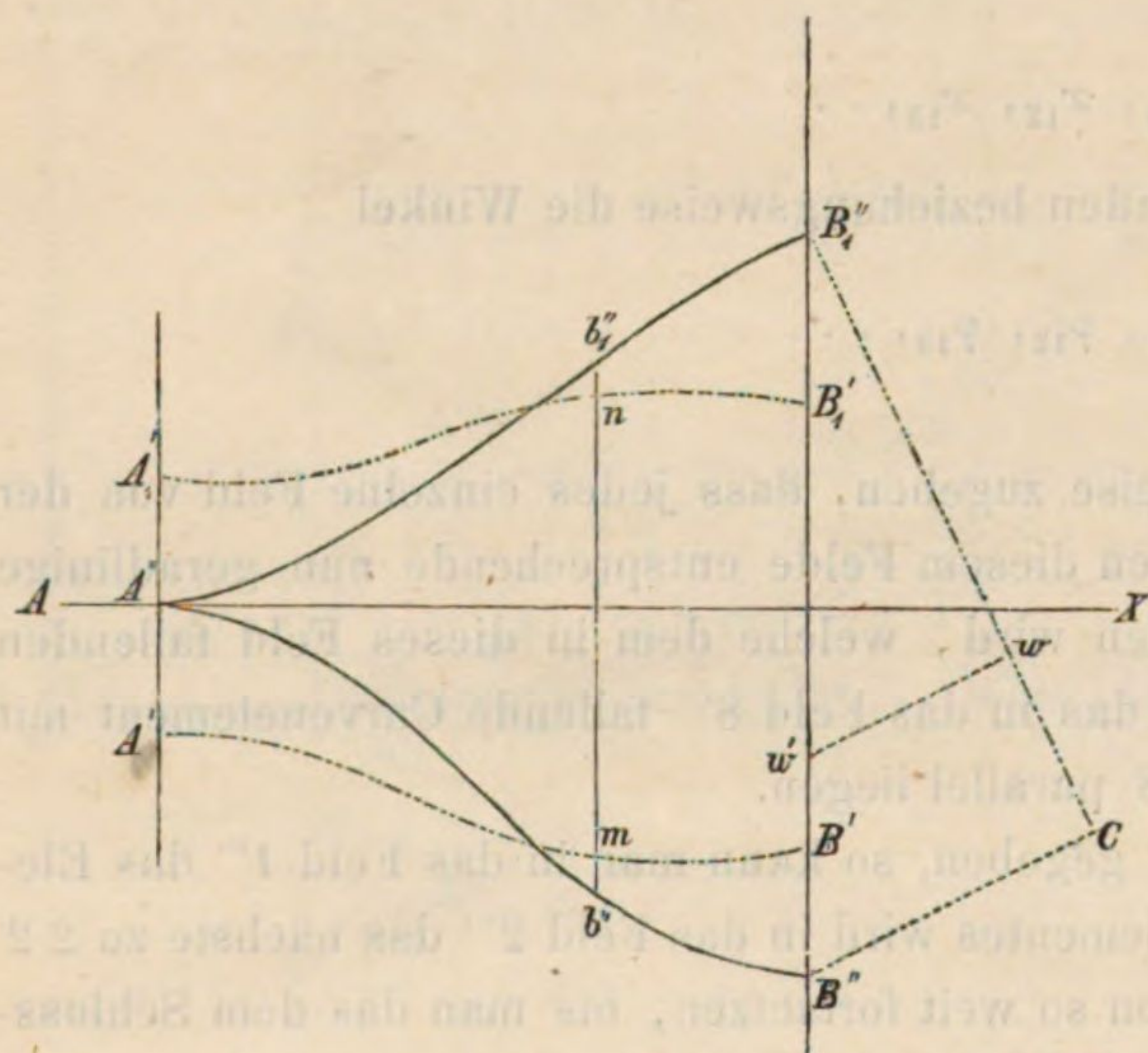
$$(41) \quad f_{n-1}(\alpha), f_{n-2}(\alpha), \dots, f_2(\alpha), f_1(\alpha), f(\alpha)$$

und erhält auf diese Weise die Lage der Ausgangspunkte für die entsprechenden successiv auf einander folgenden Integralcurven.

Der eben besprochenen Auffassung der Integralcurve gemäss lässt sich aus (36) etwa folgende Relation ableiten:

$$(42) \quad y_{10} - y_5 = \int_{x_5}^{x_{10}} f(x) dx = \text{Flächeninhalt } (5' 10' 13 8 5')$$

d. h. man erhält den Inhalt einer vertical abgegrenzten zwischen der x -Axe und einer gegebenen Curve eingeschlossenen Figur, wenn man die y -Bestimmungstücke der entsprechenden in der Integralcurve liegenden Grenzpunkte von einander subtrahirt.



Ist in Bezug auf die Axe AX und den Ausgangspunkt A'' , der Zug $A''B'_1$ die Integralcurve von $A'_1B'_1$, und $A''B''$ die Integralcurve von $A'B'$, so wird die Längenzahl von B'_1B'' eine vertical begrenzte zwischen $A'_1B'_1$ und $A'B'$ enthaltene Fläche darstellen. Ist $w'B'_1=l$ eine Längenzahl, welche eine im Verhältnisse $\frac{B'_1 w}{B'_1 C}$ abzuschneidende Partie der Fläche $A'_1B'_1B'A'A'_1$ repräsentirt, so nehme man einen geradlinig abgeschnittenen Papierstreifen mit zwei um die Länge $=l$ von einander abstehenden Punkten b'_1b'' , und verschiebe den Streifen so weit, bis B'_1 etwa in b'_1 der Curve $A'_1B'_1$, und w' in b'' der Curve $A''B''$ einspielt — und hiebei die Gerade b'_1b'' zur $B''B'_1$ parallel sich einstellt. In diesem Falle ist die Fläche $A'_1nmA'A'_1$ die verlangte Partie der im gegebenen Verhältnisse abzutheilenden Fläche $A'_1B'_1B'A'A'_1$.

Aus dieser Darstellung ist zu ersehen, dass eine sorgfältig construirte Integralcurve bei der Auflösung planimetrischer Probleme zum wenigsten eben so gute, und in manchen Fällen noch bessere Dienste zu leisten vermag, als eine zu diesem Zwecke in was immer für einer Weise construirte Planimeter-Vorrichtung selbst.

§. 2.

Über constructive Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen.

Aus (8) §. 1 folgt:

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{n-1} &= A_{n-1} + \alpha A_n, & b_{n-1} &= A_{n-1} + 2\alpha A_n, & c_{n-1} &= A_{n-1} + 3\alpha A_n \dots \\ r_{n-1} &= A_{n-1} + (n-1)\alpha A_n, & s_{n-1} &= A_{n-1} + n\alpha A_n \end{aligned}$$

Setzt man

$$s_{n-1} = 0,$$

so findet man aus der Proportion

$$\alpha : 1 = -A_{n-1} : nA_n \quad (2)$$

in Bezug auf die Gleichung

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0 \quad (3)$$

einen solchen Werth für α , welcher zur Bildung des Schema (8) verwendet, die Relation

$$f(x) = A_n (x-\alpha)^n + r_{n-2} (x-\alpha)^{n-2} + \dots + b_1 (x-\alpha) + a_0 = 0$$

oder

$$x = y + \alpha \quad (4)$$

setzend, die Relation

$$f(x) = A_n y^n + r_{n-2} y^{n-2} + \dots + c_2 y^2 + b_1 y + a_0 = 0 \quad (5)$$

bietet.

Die Gleichung (5) ist in der Beziehung einfacher als die Gleichung (3), weil in derselben das zweite Glied vom Anfange die Null zum Coefficienten erhalten hat. Die Wurzeln der Gleichung (5), jede um den Zusatz α vermehrt, bieten der Reihe nach die Wurzeln der Gleichung (3). Es würde somit genügen, Methoden zur Auflösung der Gleichungen der Form (5) aufzustellen, um mit Hilfe derselben sodann die Auflösung der vollständigen Gleichung (3) zu veranstalten.

Zur Erledigung des in diesem Paragraphen gestellten Problemes wird es somit bloss nöthig sein, eine constructive Methode festzustellen, mit deren Hilfe man in den Stand gesetzt wird, die reducirten Gleichungen

$$ax^2 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (7)$$

$$ax^3 + bx + c = 0 \quad (8)$$

zur Auflösung zu bringen.

Setzt man in (7) $x^2 = y$, so erhält man an die Stelle von (7) folgende zwei Gleichungen:

$$x^2 = y, \quad ay^2 + by + cx + d = 0. \quad (9)$$

Multipliziert man die erste mit a , und addirt sie dann zur zweiten; multiplicirt ferner die erste mit $4a$ und addirt sie dann zur zweiten, so erhält man aus (9) folgendes Gleichungspaar:

$$\left. \begin{aligned} ax^2 + ay^2 + (b-a)y + cx + d &= 0 \\ 4ax^2 + ay^2 + (b-4a)y + cx + d &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Diese Gleichungen können jedoch in folgender Form geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 + a\left(y + \frac{b-a}{2a}\right)^2 - \frac{c^2}{4a} - \frac{(b-a)^2}{4a} + d &= 0 \\ 4a\left(x + \frac{c}{8a}\right)^2 + a\left(y + \frac{b-4a}{2a}\right)^2 - \frac{c^2}{16a} - \frac{(b-4a)^2}{4a} + d &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Lässt man in den vorstehenden Gleichungen die Relationen gelten:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \frac{c^2 + (b-a)^2 - 4ad}{4a^2}, \quad \alpha = -\frac{c}{2a}, \quad \beta = -\frac{(b-a)}{2a} \\ m^2 &= \frac{c^2 + 4(b-4a)^2 - 16ad}{16a^2}, \quad \alpha' = -\frac{c}{8a}, \quad \beta' = -\frac{(b-4a)}{2a} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

so erhält man schliesslich aus (11) die Gleichungen :

$$(13) \quad \frac{(x-\alpha)^2}{r^2} + \frac{(y-\beta)^2}{r^2} = 1, \quad \frac{(x-\alpha')^2}{\left(\frac{1}{2}m\right)^2} + \frac{(y-\beta')^2}{m^2} = 1$$

welche nach Elimination von y zur Gleichung (7) führen müssen.

Es werden somit die den Gleichungen (13) genügenden x -Werthe auch der Gleichung (7) genügen, und demgemäss die der Gleichung (7) angehörigen Wurzelwerthe selbst darstellen.

Wegen (9) gehören zu primären Werthen von x positive Werthe von y , und ein solches Werthepaar von x und y kann auf ein orthogonales Axensystem bezogen zur Bestimmung der Lage eines Punktes dienen. Findet man in (12) die Werthe von r^2 und m^2 positiv, so wird in (13) in Bezug auf ein orthogonales Axensystem durch die erste Gleichung eine Kreislinie, durch die zweite hingegen eine Ellipse charakterisirt. Die gemeinschaftlichen Punkte dieser zwei Linien werden demgemäss positive y -Coordinationen besitzen, und können als primäre Wurzelpunkte der Gleichung (7) angesehen werden, weil die ihnen zugehörigen primären x -Werthe die Gleichungen (13), und somit auch die Gleichung (7) gleichzeitig erfüllen.

Findet man aber einen der Werthe r^2 oder m^2 , oder beide zugleich negativ, so ist dies ein Zeichen, dass der Gleichung (7) keine primäre x -Wurzel zukommen kann. Dieses kann jedoch auch bei positiven r^2 und m^2 zum Vorschein kommen, namentlich in dem Falle, wenn die in (13) dargestellten Linien — Kreis und Ellipse — einander nicht begegnen.

Diese hier flüchtig besprochene Darstellung dürfte genügende Anhaltspunkte gewähren, um hieraus die entscheidenden Kriterien über die Natur der Wurzeln abzuleiten. Das hier einschlägige Rechnungsproblem dem Leser überlassend, schreiten wir unmittelbar zur constructiven Darstellung der Gleichungen (13), und im Gefolge dessen zur Darstellung der der Gleichung (7) angehörigen Wurzeln.

Die Gleichung (8) braucht nicht erst besonders abgehandelt zu werden, denn sie ergibt sich als ein specieller Fall der Gleichung (7), sobald man die in (12) und (13) angedeuteten Constructionen für $d=0$ effectuirt. Auf diese Weise wird eigentlich die Auflösung der Gleichung

$$(14) \quad ax^4 + bx^2 + cx = 0$$

eingeleitet. Man sieht jedoch auf den ersten Blick, dass mit Ausnahme der Wurzel $x=0$ alle übrigen drei Wurzeln dieser Gleichung auch der Gleichung (7) angehören müssen.

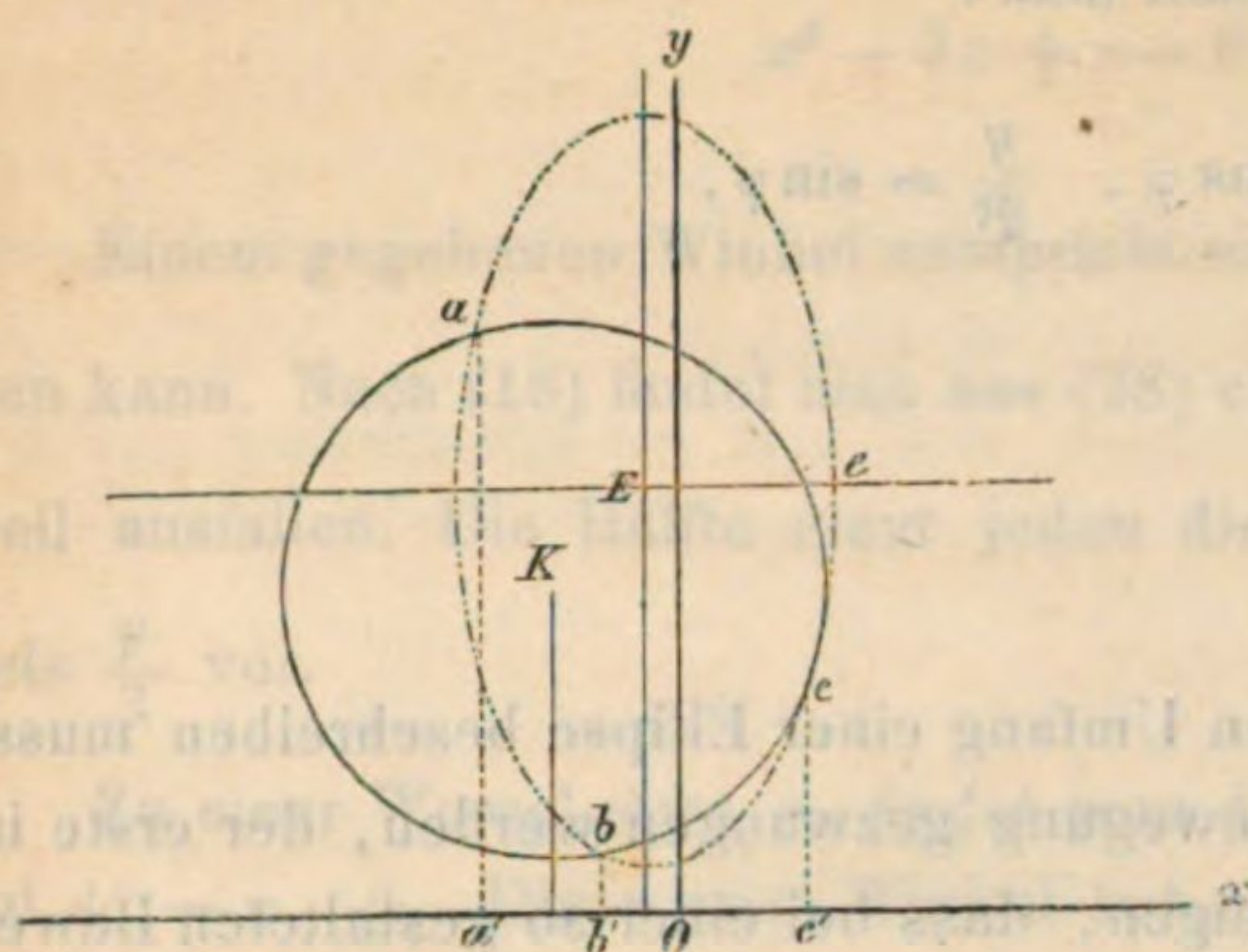
$$(15) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Für die Gleichung} \\ \text{findet man nach (12):} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0 \\ r = 4 \cdot 12 \dots; \quad m = 5 \cdot 59 \dots \\ \alpha = -2, \quad \beta = 5, \quad \alpha' = -\frac{1}{2}, \quad \beta' = 6 \cdot 5 \end{array}$$

$$(16) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Für die Gleichung} \\ \text{findet man nach (12):} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0 \\ r = 5 \cdot 59 \dots; \quad m = 5 \cdot 65 \dots \\ \alpha = -4, \quad \beta = \frac{7}{2}, \quad \alpha' = -1, \quad \beta' = 5 \end{array}$$

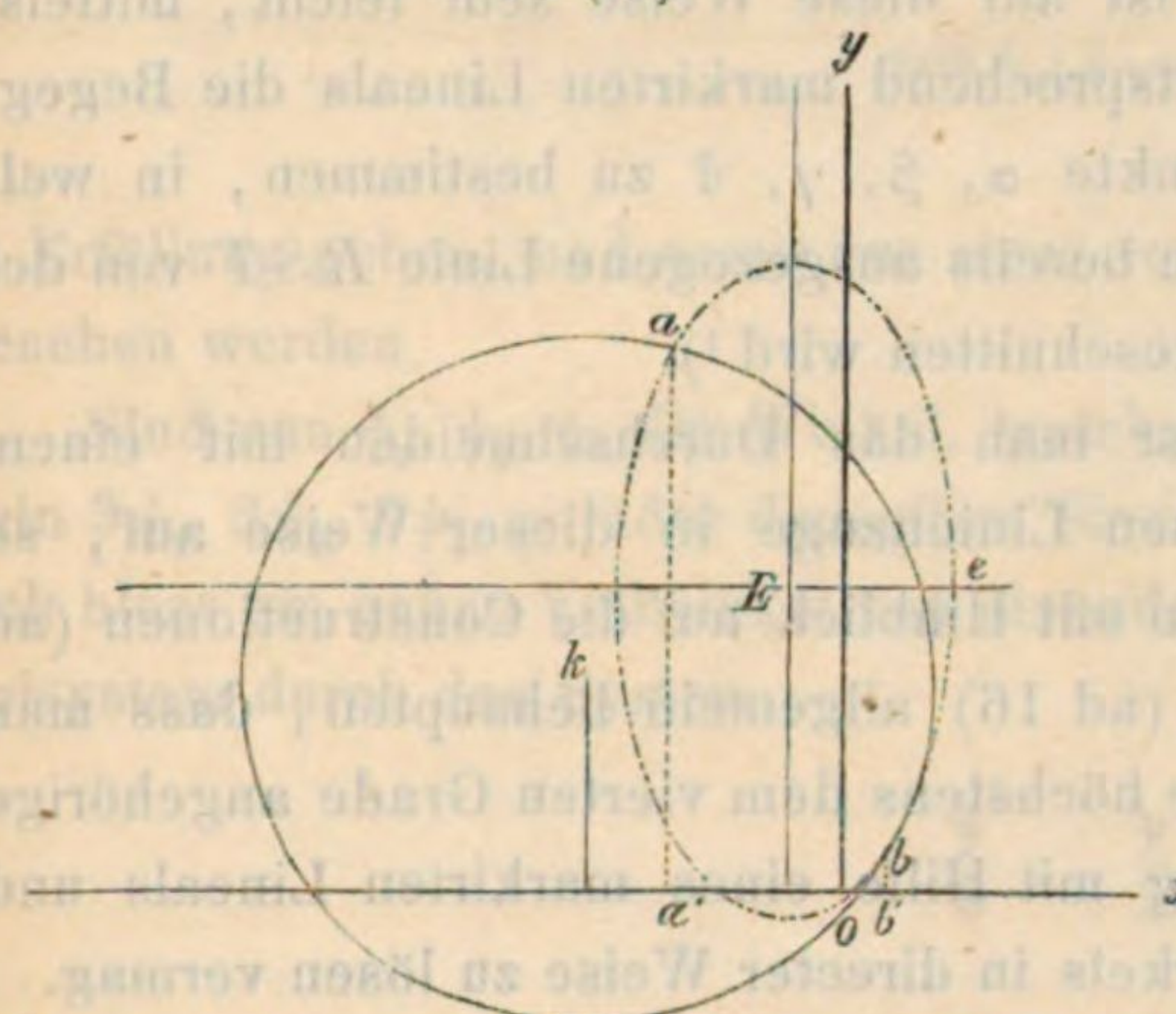
$$(17) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Für die Gleichung} \\ \text{findet man nach (12):} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^4 - qx = 0 \\ r^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad m^2 = \left(\frac{q}{4}\right)^2 + 2^2 \\ \alpha = \frac{q}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha' = \frac{q}{8}, \quad \beta' = 2 \end{array}$$

In den hier gewählten Beispielen haben wir die in (12) angedeuteten Elemente durch Rechnung bestimmt. Es liegt jedoch nichts im Wege, diese Elemente durch reine Construction zu ermitteln.

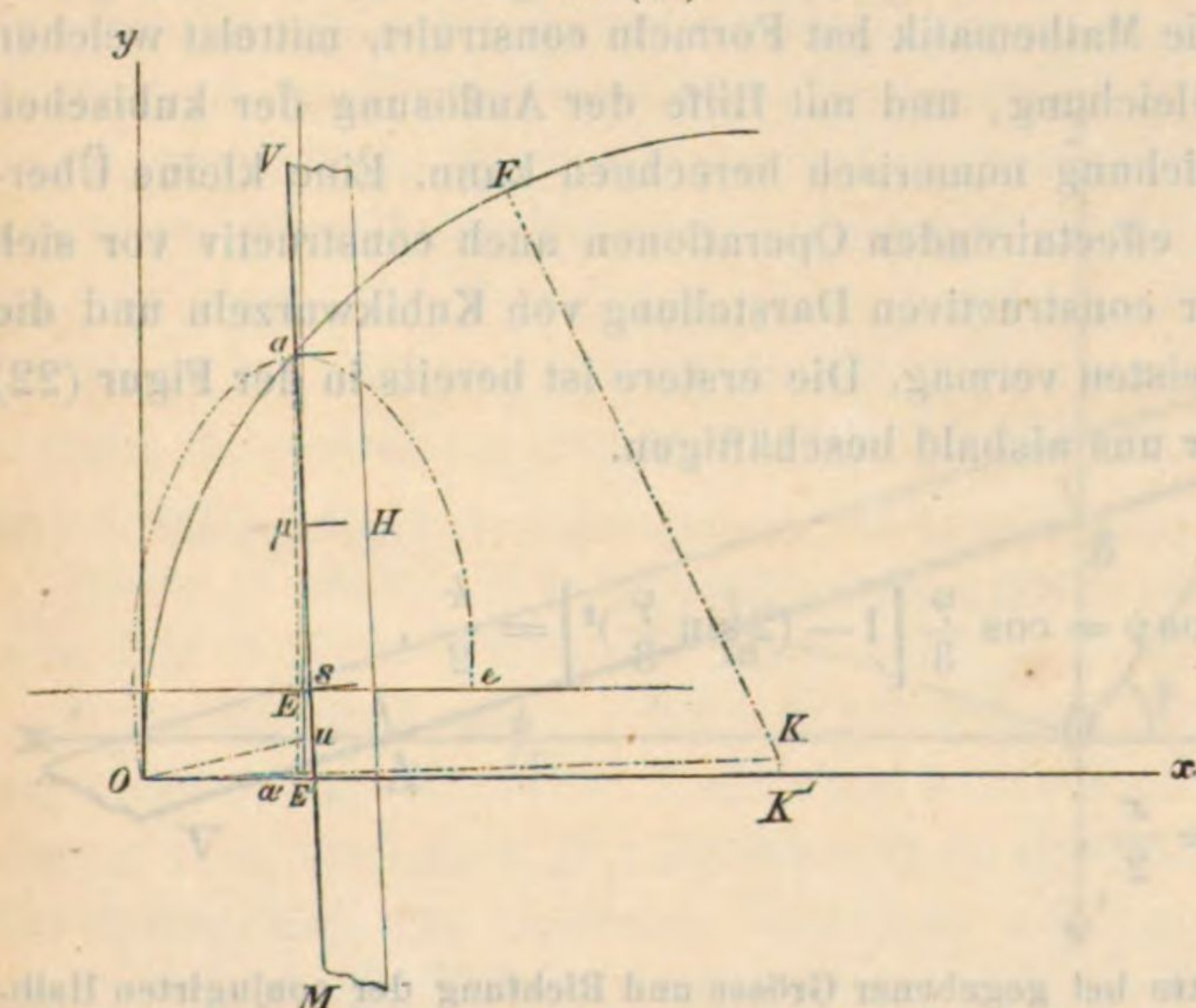
(ad 15)



ad (16)



ad (17)



In den vorstehenden Figuren ist ad (15), (16) und (17) die constructive Darstellung durchgeführt. In Bezug auf das orthogonale Axensystem xoy ist in jeder der Figuren das Centrum k des Kreises durch die Coordinaten α , β , und das Centrum E der Ellipse durch die Coordinaten α' , β' bestimmt. Der Radius eines jeden der Constructionskreise hat die Länge des betreffenden r , und die Längen der grossen und kleinen Halbaxe der Constructionsellipsen sind die entsprechenden Längen von m und $\frac{m}{2}$.

Ad (15) hat man die Wurzeln:

$$x_1 = oa' = -3; \quad x_2 = ob' = -1; \quad x_3 = x_4 = oc' = 2 \quad (19)$$

ad (16)

$$x_1 = oa' = -3, \quad x_2 = x_3 = x_4 = ob' = 1 \quad (20)$$

ad (17) ist $q = 27$ und die Wurzeln folgende:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = oa' = 3 = \sqrt[3]{q}, \quad x_3 \text{ u. } x_4 \text{ sind complex.} \quad (21)$$

In der ersten dieser Figuren stellt c einen Doppelpunkt vor, d. h. einen Berührungspunkt zwischen Kreis und Ellipse.

In der zweiten Figur stellt b einen dreifachen Punkt dar, d. h. einen solchen, welcher gleichzeitig Schnitt- und Berührungspunkt zwischen Kreis und Ellipse repräsentirt.

In der dritten Figur (22) ist die Construction sogar in Bezug auf die Relationen (12) durchgeführt. Hierin ist $ok' = \frac{q}{2} = \frac{27}{2}$

$kk' = \frac{1}{2}$, $oe' = \frac{q}{8} = \frac{27}{8}$, $E'u = Eu = 1$, hiemit $ou = \frac{m}{2} = \sqrt{\left(\frac{q}{8}\right)^2 + 1}$. Die Ellipse in dieser

Figur ist mit Hilfe des Papierstreifens VMH ausgeführt, welcher an seinem geradlinig abgeschnittenen

Rande VM drei äquidistante, je um $\frac{m}{2} = ou$ von

einander abstehende Marken s , μ , a trägt, und in dieser Weise bewegt werden soll, dass hiebei s auf der kleinen, und μ auf der grossen Ellipsenhalbaxe verbleibt. Zum Behufe der Ausmittlung der Durchschnittspunkte des Kreises mit der Ellipse soll die Kreislinie bereits ausgezogen worden sein, und (22) dann mittelst VMH bloss diejenigen Punkte gesucht werden, in welchen bei regelrechter Stellung des Papierstreifens die Marke a in die Kreislinie einspielt.

Die Richtigkeit des eben Gesagten wird aus folgender allgemein gehaltener Construction einleuchten. In (25) sei das Lineal VM mit den Marken n , a , e in der Art versehen, dass man $en = \mathfrak{A}$,

und $ea = \mathfrak{B}$ setzt, und die Bewegung desselben jedesmal so einrichtet, dass beständig a in Ox , und n in Oy verbleibe.

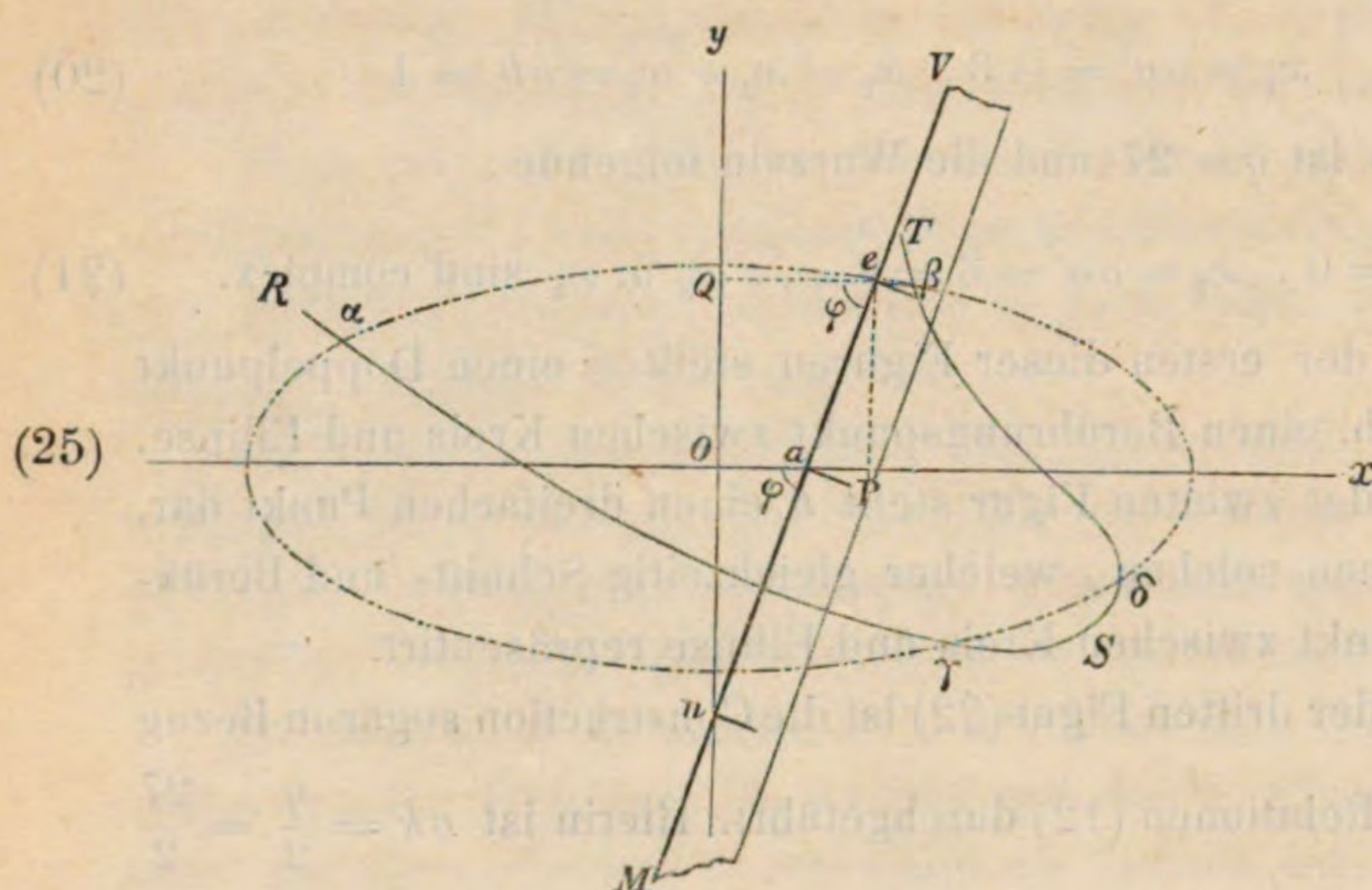
Es bilde das Lineal bei irgend einer dieser Stellungen mit Ox den Winkel φ , und es seien $x = OP$, $y = Pe$ die Coordinaten der diesmaligen Lage der Marke e , so erhält man:

$$\frac{Qe}{en} = \cos \varphi, \quad \frac{Pe}{ea} = \sin \varphi, \quad \text{oder} \quad \frac{x}{\mathfrak{A}} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{\mathfrak{B}} = \sin \varphi,$$

somit für ein beliebiges φ :

$$(23) \quad \frac{x^2}{\mathfrak{A}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{B}^2} = 1.$$

Hieraus sieht man ein, dass jeder Punkt des Lineals VM den Umfang einer Ellipse beschreiben muss, sobald zwei Punkte desselben — etwa α und n — während der Bewegung gezwungen werden, der erste in Ox , der zweite in Oy zu verbleiben. Es lässt sich sehr leicht zeigen, dass bei einer so gestalteten Bewegung ein jeder Punkt der Ebene, in welcher das Lineal liegt, eine Ellipse beschreiben muss.



Es ist auf diese Weise sehr leicht, mittelst eines entsprechend markirten Lineals die Begegnungspunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu bestimmen, in welchen eine bereits ausgezogene Linie RST von der Ellipse geschnitten wird¹⁾.

Fasst man das Durchschneiden mit einem elliptischen Linienzuge in dieser Weise auf, so kann man mit Hinblick auf die Constructionen (ad 15) und (ad 16) allgemein behaupten, dass man eine jede höchstens dem vierten Grade angehörige Gleichung mit Hilfe eines markirten Lineals und eines Zirkels in directer Weise zu lösen vermag.

Aus der Figur in (22) ersieht man eine vollständige directe Constructionsmethode der Ausziehung von Kubikwurzeln. Hieher gehört auch die schon seit uralten Zeiten vergebens gesuchte Lösung des Problems über die Verdoppelung des Würfels.

Die in (25) ausgesprochene Behauptung ist bloss in Bezug auf die Bestimmung der primären (reellen) Wurzeln der erwähnten Gleichungen gerechtfertigt. Die Mathematik hat Formeln construiert, mittelst welchen man auch die complexen Wurzeln einer kubischen Gleichung, und mit Hilfe der Auflösung der kubischen Gleichung auch die Wurzeln der biquadratischen Gleichung numerisch berechnen kann. Eine kleine Überlegung belehrt uns, dass die in diesen Formeln zu effectuierenden Operationen auch constructiv vor sich gehen können, sobald man einmal die Operation der constructiven Darstellung von Kubikwurzeln und die der Dreitheilung eines Winkels in directer Weise zu leisten vermag. Die erstere ist bereits in der Figur (22) erledigt; mit der Darstellung der Trisection wollen wir uns alsbald beschäftigen.

Es sei

$$\sin \varphi = 3 \sin \frac{\varphi}{3} - 4 \sin \frac{3\varphi}{3} = \frac{S}{2}; \quad \cos \varphi = \cos \frac{\varphi}{3} \left[1 - (2 \sin \frac{\varphi}{3})^2 \right] = \frac{k}{2},$$

sei ferner

$$(27) \quad \sin \frac{\varphi}{3} = \frac{x}{2},$$

¹⁾ Diese und mehrere andere Constructionen der Kegelschnitte bei gegebener Grösse und Richtung der conjugirten Halbachsen, und überhaupt über die Verwendung mobiler, mit Marken versehener Linienzüge finden sich im II. Bande meines Werkes betitelt: „Wykład Matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach. Lwów 1864.“ = Mathematische Vorträge, gegründet auf die Anschauung der Grössen mit beliebigen Richtungen im Raume. Lemberg 1864. Zwei Bände

so erhält man

$$x^3 - 3x + s = 0 \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \cos \frac{\varphi}{3} (1 - x^2) = \frac{k}{2}. \quad (28)$$

Einem gegebenen Winkel entspricht ein bestimmtes s und k , welche man sehr leicht constructiv bestimmen kann. Nach (18) findet man aus (28) etwa die Wurzeln x_1, x_2, x_3 , welche wegen $\left(\frac{s}{2}\right)^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^3$ immer reell ausfallen. Die Hälfte einer jeden dieser drei Wurzeln stellt den Sinus des zu bestimmenden Winkels $\frac{\varphi}{3}$ vor.

Zu einer Wurzel etwa x_1 findet man durch Construction etwa den Winkel ψ_1 und gleichzeitig den Winkel $\psi'_1 = \pi - \psi_1$. Diese zwei Winkel haben entgegengesetzt bezeichnete Cosinuse — und es kann diesfälliger wegen (18) bloss eine der Relationen

$$\cos \psi_1 (1 - x_1^2) = \frac{k}{2}, \quad \cos \psi'_1 (1 - x_1^2) = \frac{k}{2} \quad (29)$$

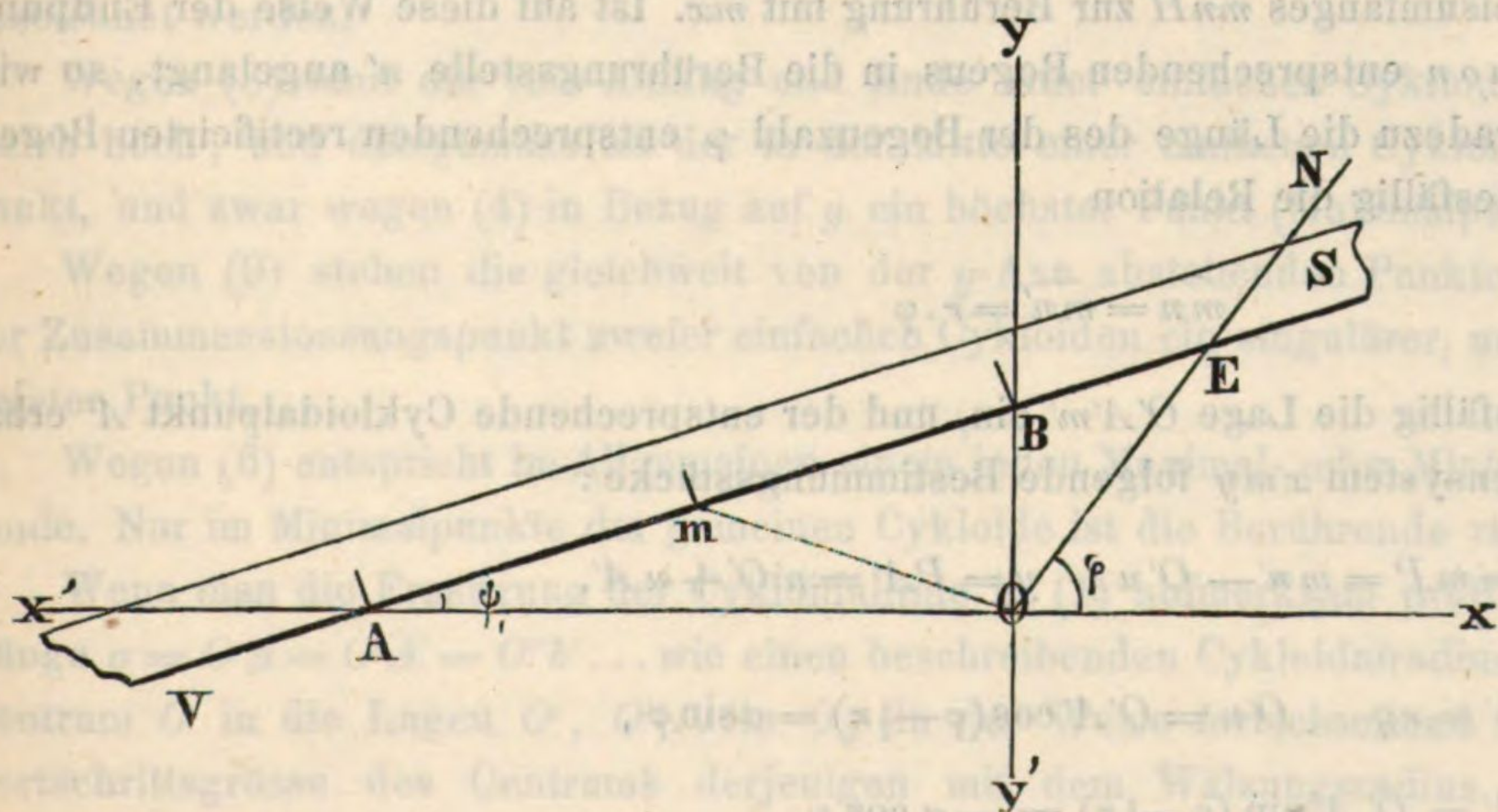
in Erfüllung gehen, und somit nur einer von diesen Winkeln als der dem gestellten Probleme genügende angesehen werden.

Sind nun ψ_1, ψ_2, ψ_3 die Winkel, welche den Relationen (28) gleichzeitig genügen, so wird von den Winkeln $3\psi_1, 3\psi_2, 3\psi_3, \varphi$ jeder denselben Sinus und Cosinus besitzen, und es können demgemäss diese Winkel sich bloss um ganze Vollwinkel von einander unterscheiden. Folglich kann das aus (28) hervorgehende Winkelsystem durch das System

$$\frac{\varphi}{3}, \quad \frac{\varphi}{3} + \frac{360}{3}, \quad \frac{\varphi}{3} + \frac{2 \cdot 360}{3} \quad \text{oder} \quad (30)$$

$$\frac{\varphi}{3}, \quad \frac{\varphi}{3} + 120^\circ, \quad \frac{\varphi}{3} + 240^\circ$$

ersetzt werden. Die constructive Angabe des ersten von diesen Winkeln bildet eben die Lösung des Problems von der sogenannten Dreitheilung des Winkels (Trisectio anguli). Eine zweite bedeutend einfachere Lösung dieses Problems geben wir im Folgenden.



Lineal gleichzeitig durch E hindurchgeht. Hiedurch erhält man auf Ox den Punkt A , und die Gerade AE ; dann ist der Winkel $\angle xAE = \psi_1$ der dritte Theil von φ .

(Zmurko.)

Zum Behufe der Angabe des dritten Theiles des vorgelegten Winkels $\varphi = \angle xON$ nehme man ein mit äquidistanten Marken A, m, B versehenes Lineal VS — schneide auf dem zweiten Schenkel ON $OE = mB = mA$ ab, und bestimme den Punkt E ; sodann errichte man auf Ox die Senkrechte Oy und bewege das Lineal VS dergestalt, dass die Marke A in Ox , die Marke B in Oy einspielt, bis man in diejenige Stellung gelangt, wo das

Beweis. Im rechtwinkligen Dreiecke ist $mO = mA = Bm = OE$, daher $\sphericalangle OEM = \sphericalangle Emo = 2\psi_1$, und schliesslich $\sphericalangle EO, X = \sphericalangle OEA + \sphericalangle EAO$ oder

$$(32) \quad \varphi = 2\psi_1 + \psi_1 = 3\psi_1. \quad \text{q. c. d.}$$

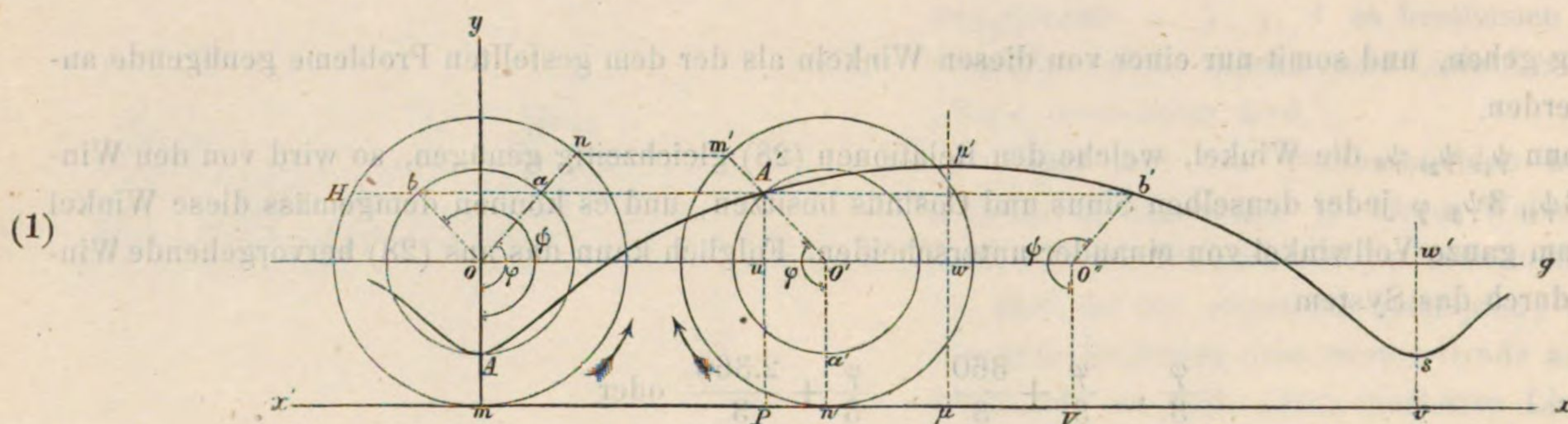
Die Construction (31) liefert auch die übrigen zwei Winkeln des Systems (30), wenn man zur Anlegung des Lineals VS zuerst den Quadrant xoy' und dann den Quadrant xoy verwendet.

Im Quadrant $y'OA$ ist die regelrechte Stellung von VS unmöglich, weil man bei Einspielung von A in OA , von B in Oy' nicht bewirken kann, dass das Lineal durch E hindurchgehe.

§. 3.

Einiges über Cykloiden und cykloidale Constructionsaxen.

Wird die Kreisscheibe mnH auf der Geraden $m\alpha$ fortgerollt, so beschreibt ein jeder in der Ebene der Kreisscheibe liegende Punkt A einen Linienzug $AA'S \dots$, welchen man mit dem generellen Namen



Cykloide belegt. Wird hierbei der Radius der Kreisscheibe = (Wälzungsradius) mit r , und der Abstand des ins Auge gefassten Punktes A vom Centrum = (Cykloidalradius) mit a bezeichnet, so können wir je nach der Wahl von a drei Arten von Cykloiden unterscheiden, und zwar: die verkürzte, verlängerte und gemeine Cykloide, je nachdem der Cykloidalradius sich kleiner oder grösser gestaltet, als der Wälzungsradius, oder demselben an Länge gleichkommt.

Beim Fortrollen der Kreisscheibe gelangen nach und nach die in der Richtung des Pfeiles aufeinander folgenden Bogenelemente des Kreisumfangs mnH zur Berührung mit $m\alpha$. Ist auf diese Weise der Endpunkt n des der Bogenzahl $\varphi = \text{arc } \sphericalangle mon$ entsprechenden Bogens in die Berührungsstelle n' angelangt, so wird das geradlinige Segment mn' geradezu die Länge des der Bogenzahl φ entsprechenden rectificirten Bogens $\widehat{mn}$ ausmachen, und es besteht diesfällg die Relation

$$(3) \quad \widehat{mn} = \overline{mn'} = r \cdot \varphi$$

Der Radius $OA m$ nimmt diesfällg die Lage $O'A'm'$ ein, und der entsprechende Cykloidalpunkt A' erhält in Bezug auf das orthogonale Axensystem xmy folgende Bestimmungsstücke:

$$x = mP = mn' - O'u, \quad y = PA' = n'O' + uA',$$

wobei

$$mn' = r\varphi, \quad O'u = O'A' \cos(\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) = a \sin \varphi,$$

$$uA' = O'A' \sin(\varphi - \tfrac{1}{2}\pi) = -a \cos \varphi,$$

hiemit

$$x = r\varphi - a \sin \varphi, \quad y = r - a \cos \varphi.$$

Aus den vorstehenden Relationen φ eliminierend, hat man:

$$x = r \arccos \left(\frac{r-y}{a} \right) - \sqrt{a^2 - (r-y)^2}. \quad (5)$$

Dies ist die analytische Gleichung des vollständigen Cykloidalzuges, und zwar eines verkürzten, gemeinen oder verlängerten, je nachdem a kleiner, gleich oder grösser vorausgesetzt wird, als der Wälzungsradius r .

Aus (4) findet man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin \varphi}{r - a \cos \varphi} = \tan \sigma = \frac{n' P}{PA'} = \tan \angle n' A' P, \quad (6)$$

wo σ den Winkel darstellt, welchen die Berührende an den der Bogenzahl φ entsprechenden Punkt (x, y) mit der x -Axe einschliesst. Dieser Winkel ist derjenige, welchen die Verbindungslinie des Cykloidalpunktes A' mit dem entsprechenden Wälzungsberührungspunkte n' mit der Axe my einschliesst. Demgemäss ist $A'n'$ die zu A' gehörige Normallinie.

Bezeichnet man die zu φ gehörigen Coordinaten mit x_φ, y_φ , so kann man aus (4) folgende Relationen ableiten:

Für

$$p = 2r\pi$$

$$y_{\varphi+2\pi} = y_\varphi, \quad x_{\varphi+2\pi} = x_\varphi + p \quad (7)$$

$$y_{2\pi-\varphi} = y_\varphi, \quad x_\varphi + x_{2\pi-\varphi} = p \quad (8)$$

$$y_{-\varphi} = y_\varphi, \quad x_{-\varphi} + x_\varphi = 0. \quad (9)$$

Ein Segment der Axe mx von der Länge p entspricht einer vollen Wälzung der rollenden Kreisscheibe und wird eine volle Strecke genannt. Ein Segment der unendlichen Cykloidallinie, welches einer vollen Strecke, wie etwa in (1) der Strecke mv entspricht, heisst eine einfache Cykloide. (10)

Wegen (7) ist der unendliche Cykloidalzug aus unendlich vielen aneinander gefügten einfachen Cykloiden zusammengesetzt, weil die der ersten vollen Wälzung entsprechende Aufeinanderfolge der y -Coordinaten sich bei jeder anderen vollen Wälzung in derselben Weise wiederholt. Vom Anfangspunkte m aus bezeichnen wir die anfängliche volle Strecke mit p_0 , und die weiter nach rechts folgenden vollen Strecken mit $p_1, p_2, \dots$, eben so mit $p_{-1}, p_{-2}, \dots$, die weiter nach links folgenden vollen Strecken. Die etwa über p_m sich wölbende einfache Cykloide soll mit C_m , und jede die m te volle Strecke schneidende Verticale mit V_m bezeichnet werden. (11)

Wegen (8) sind die vom Anfang und Ende einer einfachen Cykloide gleichweit abstehenden Punkte gleich hoch, und demgemäss ist der in der Mitte einer einfachen Cykloide stehende Punkt ein singulärer Punkt, und zwar wegen (4) in Bezug auf y ein höchster Punkt (Maximalpunkt). (12)

Wegen (9) stehen die gleichweit von der y -Axe abstehenden Punkte gleich hoch, und demgemäss ist der Zusammenstossungspunkt zweier einfachen Cykloiden ein singulärer, und namentlich ein Minimalpunkt — tiefster Punkt. (13)

Wegen (6) entspricht im Allgemeinen einem jeden Maximal- oder Minimalpunkte eine horizontale Berührende. Nur im Minimalpunkte der gemeinen Cykloide ist die Berührende vertical. (14)

Wenn man die Erzeugung der Cykloidallinie in (1) aufmerksam prüft, so könnte man in der That die Länge $a = OA = O'A' = O''b' \dots$ wie einen beschreibenden Cykloidalradius ansehen, während man sich das Centrum O in die Lagen $O', O'' \dots$ in Og in der Weise fortschreitend denken muss, dass jedesmal die Fortschrittsgrösse des Centrums derjenigen mit dem Wälzungsradius multiplicirten Bogenzahl gleichkomme, welche der Richtungsdivergenz der ins Auge gefassten Grenzlagen des Cykloidalradius entspricht. (15)
So findet man in (1) zwischen den Radien $O'A'$ und $O''b'$ die Bogenzahl $\psi - \varphi$, daher der Abstand von O' bis $O'' = r(\psi - \varphi)$.

der Punkt B' der Begegnungspunkt des Zuges $B''B'B'''$ mit den Linien CC' und GG' , und B' , der Begegnungspunkt der Cykloide mit gg' .

In (17) wird der Doppelpunkt ω , in welchem zwei benachbarte einfache Cykloiden die Verticale treffen, ein Knotenpunkt genannt. Die Partie der Cykloide, welche zwei benachbarte Knotenpunkte verbindet, (20) heisst Kerneykloide. Die Restpartien zweier benachbarten einfachen Cykloiden bilden eine Schleife, welche in e und e' die Axe mx schneidet. In diesen Punkten ist $y=0$, und man erhält zu ihrer weiteren Bestimmung nach (19):

$$x_e = r \arccos \left(\cos = \frac{r}{b} \right) - \sqrt{b^2 - r^2}, \quad x_{e'} = \sqrt{b^2 - r^2} - r \arccos \left(\cos = \frac{r}{b} \right). \quad (21)$$

Mittelst (6) überzeugt man sich leicht, dass die in e und e' zu legenden Berührenden eine verticale Stellung einnehmen, und man wird aus diesem Grunde sehr passend die Länge ee' als die Breite der Schleife ansehen. Eine verticale Gerade, welche das Breitensegment ee' trifft, wird ganz gewiss die Cykloidenschleife in zwei Punkten schneiden. (22)

Bei grösseren b kann es sich ereignen, dass $x_{e'} = -x_e$ mehrere volle Strecken übertrifft. In diesem Falle bildet sich um jeden Grenzpunkt zweier einfachen Cykloiden eine Schleife, welche sich über mehrern vollen Strecken, und bisweilen noch über Theilpartien solcher Strecken wölbt. Im Gefolge dessen erscheint jede einzelne volle Strecke überwölbt, einestheils von einer Kerneykloide, und dann noch von so vielen Schleifen, als überhaupt die Anzahl der vollen Strecken beträgt, welche in den Bereich der Breite einer einzelnen Schleife mit einbezogen sind. (23)

Ist etwa

$$x_{e'} = \sqrt{b^2 - r^2} - r \arccos \left(\cos = \frac{r}{b} \right) = np + u \quad (24)$$

wo n eine ganze Zahl vorstellt, und $u < p$ sich ergibt, so wölben sich über einer jeden vollen Strecke der Axe mx vor Allem die dieser Strecke entsprechende Kerneykloide; $2n$ Cykloidenschleifen der ganzen Strecke entlang; und ausserdem ist nach Massgabe des u vom Anfang und Ende aus je eine Partie der Strecke von je einer Cykloidenschleife in der Breite u überwölbt. (25)

Sei nun $v < p$ der Abstand einer Verticallinie V vom Anfangspunkte einer beliebigen einfachen Cykloide, welche zur Relation (24) die Grössen n und u liefert. Sei ferner durch das Symbol (u, v) die jeweilige Correlation zwischen u und v vergegenwärtigt, welche die Zahl $\mathfrak{A}$ als Anzahl der Durchschnittspunkte zwischen V und der vorgelegten Cykloide veranlasst, so könnte man die Gleichung

$$(u, v) \equiv \mathfrak{A} \quad (26)$$

auf folgende Weise lesen:

„Die Bedingung (u, v) veranlasst $\mathfrak{A}$ Durchschnittspunkte zwischen V und dem zu n und u gehörigen Cykloidalzuge.“

Auf Grund dieser Deutung und der Betrachtung in (25) lässt sich zur Beurtheilung der jeweiligen Vorkommnisse sehr leicht folgendes Täfelchen entwerfen:

$(u, v) \equiv \mathfrak{A}$			
$u = 0, v$ beliebig	$(4n + 1)$	$u < \frac{1}{2}p, (p-u) \geq v$	$(4n + 3)$
$u = \frac{1}{2}p, v \leq u$	$(4n + 3)$	$u > \frac{1}{2}p, v = u$	$(4n + 5)$
$u = \frac{1}{2}p, v = u$	$(4n + 5)$	$u > \frac{1}{2}p, v = p - u$	$(4n + 5)$
$u < \frac{1}{2}p, u < v < (p - u)$	$(4n + 1)$	$u > \frac{1}{2}p, v > u$	$(4n + 3)$
$u < \frac{1}{2}p, u \geq v$	$(4n + 3)$	$u > \frac{1}{2}p, v < (p - u)$	$(4n + 3)$

(27)

Das Schema (27) gilt offenbar nur für verlängerte Cykloiden. Die verkürzte sowohl als auch die gemeine Cykloide wird von einer Verticalen im Allgemeinen bloss in einem einzigen Punkte getroffen. Eine Ausnahme bildet der Zusammenstossungspunkt zweier einfachen gemeinen Cykloiden, welcher der entsprechenden Verticalen als ein Doppelpunkt angehört.

Dem Schema (27) gemäss kommt es darauf an, die Begegnungspunkte und die diesen Punkten entsprechenden Wälzungsbogenzahlen zwischen einer gegebenen Verticalen und den aufeinander folgenden Cykloiden zu bestimmen. In der Praxis genügt eine einzige einfache Cykloide, um mit Hilfe derselben die sämtliche Anzahl der Begegnungspunkte sammt den diesen Punkten entsprechenden Wälzungsbogenzahlen zu ermitteln.

Ist nämlich die vorgelegte Verticale V_m , so denke man sich ein System von Verticalen

$$(28) \quad \dots V_{m-3}, V_{m-2}, V_{m-1}, V_m, V_{m+1}, V_{m+2}, V_{m+3} \dots$$

von der Beschaffenheit, dass je zwei Nachbarverticalen die gemeinschaftliche Distanz p aufweisen, auf der Zeichnungsfläche eingetragen, und von den einfachen Cykloiden bloss die der C_m entsprechende verkürzte Cykloide mittelst der am Schlusse dieses Paragraphes beschriebenen Vorrichtung an gehöriger Stelle der Zeichnungsfläche verzeichnet. Mittelst des zu C_m gehörigen Cykloidalradius b bestimme man die Begegnungspunkte der Linienpaare

$$(29) \quad \begin{aligned} &(C_m, V_m); (C_m, V_{m+1}); (C_m, V_{m+2}); (C_m, V_{m+3}) \dots \\ &(C_m, V_{m-1}); (C_m, V_{m-2}); (C_m, V_{m-3}) \dots \end{aligned}$$

von denen das erste Paar bloss einen einzigen Punkt, dagegen jedes andere Linienpaar je zwei Durchschnittspunkte liefert. Zu einem jeden der in (29) angedeuteten Begegnungspunkte bestimme man den entsprechenden positiven Wälzungswinkel in der Art, als wenn diese Punkte auf der Cykloide C_0 gelagert wären. In diesem Falle wird von den entsprechenden positiven Wälzungsbogenzahlen

$$(30) \quad \begin{aligned} &\psi_m; \psi_{m+1}, \psi'_{m+1}; \psi_{m+2}, \psi'_{m+2}; \psi_{m+3}, \psi'_{m+3}; \dots \\ &\psi_{m-1}, \psi'_{m-1}; \psi_{m-2}, \psi'_{m-2}; \psi_{m-3}, \psi'_{m-3}; \dots \end{aligned}$$

keine die Grösse 2π übertreffen.

In Bezug auf die y -Coordinten der Punkte (29) kann man das System (29) durch das System

$$(31) \quad \begin{aligned} &(C_m, V_m); (C_{m-1}, V_m); (C_{m-2}, V_m); (C_{m-3}, V_m) \dots \\ &(C_{m+1}, V_m); (C_{m+2}, V_m); (C_{m+3}, V_m) \dots \end{aligned}$$

ersetzen, und erhält mit Hilfe (30) und (31) folgendes vervollständigte System von Wälzungsbogenzahlen:

$$(32) \quad \begin{aligned} &2m\pi + \psi_m; 2(m-1)\pi + \psi_{m+1}, 2(m-1)\pi + \psi'_{m+1}; 2(m-2)\pi + \psi_{m+2}, 2(m-2)\pi + \psi'_{m+2}; \dots \\ &2(m+1)\pi + \psi_{m-1}, 2(m+1)\pi + \psi'_{m-1}; 2(m+2)\pi + \psi_{m-2}, 2(m+2)\pi + \psi'_{m-2}; \dots \end{aligned}$$

Dies sind die Bogenzahlen, welche den Begegnungspunkten (31) als die entsprechenden Wälzungsbogenzahlen angehören. Diese Punkte sind einestheils in dem mit b beschriebenen Cykloidalzug, andererseits aber sämtlich in der Verticalen V_m enthalten, müssen daher sämtlich hinsichtlich der x -Coordinate mit einander übereinstimmen.

Ist

$$(33) \quad x = mp + u = X \quad \text{oder} \quad x = X$$

die gegebene analytische Gleichung der Geraden V_m , so erhält man in Bezug auf die Begegnungspunkte dieser Geraden mit dem zu b gehörigen Cycloidenzug folgende zur Bestimmung der Wälzungsbogenzahl φ dienende Relation

$$X = r\varphi - b \sin \varphi \quad (34)$$

welche dem Obigen gemäss erfüllt werden muss, wenn man an die Stelle der Unbekannten φ eine beliebige der in (32) angedeuteten Zahlen substituirt.

Die Bildung des Cycloidenzuges beansprucht zur Darstellung der aufeinander folgenden Wälzungsbogenzahlen das ganze Continuum der zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden Zahlen, es wird daher eine der Gleichung (34) genügende Zahl auf einen Winkel hinweisen, welcher der Verticalen $[x = X]$ und dem zum Radius b gehörigen Cycloidenzug gemeinschaftlich angehört — und ganz gewiss unter den in (31) angedeuteten vorkommen muss. Demgemäss sind in (32) die sämtlichen der Gleichung (34) angehörigen reellen Wurzeln dargestellt, deren Anzahl zwar aus der Construction von selbst hervorgeht, aber auch ohne dieselbe nach dem Schema (27) sehr leicht vermittelt wird.

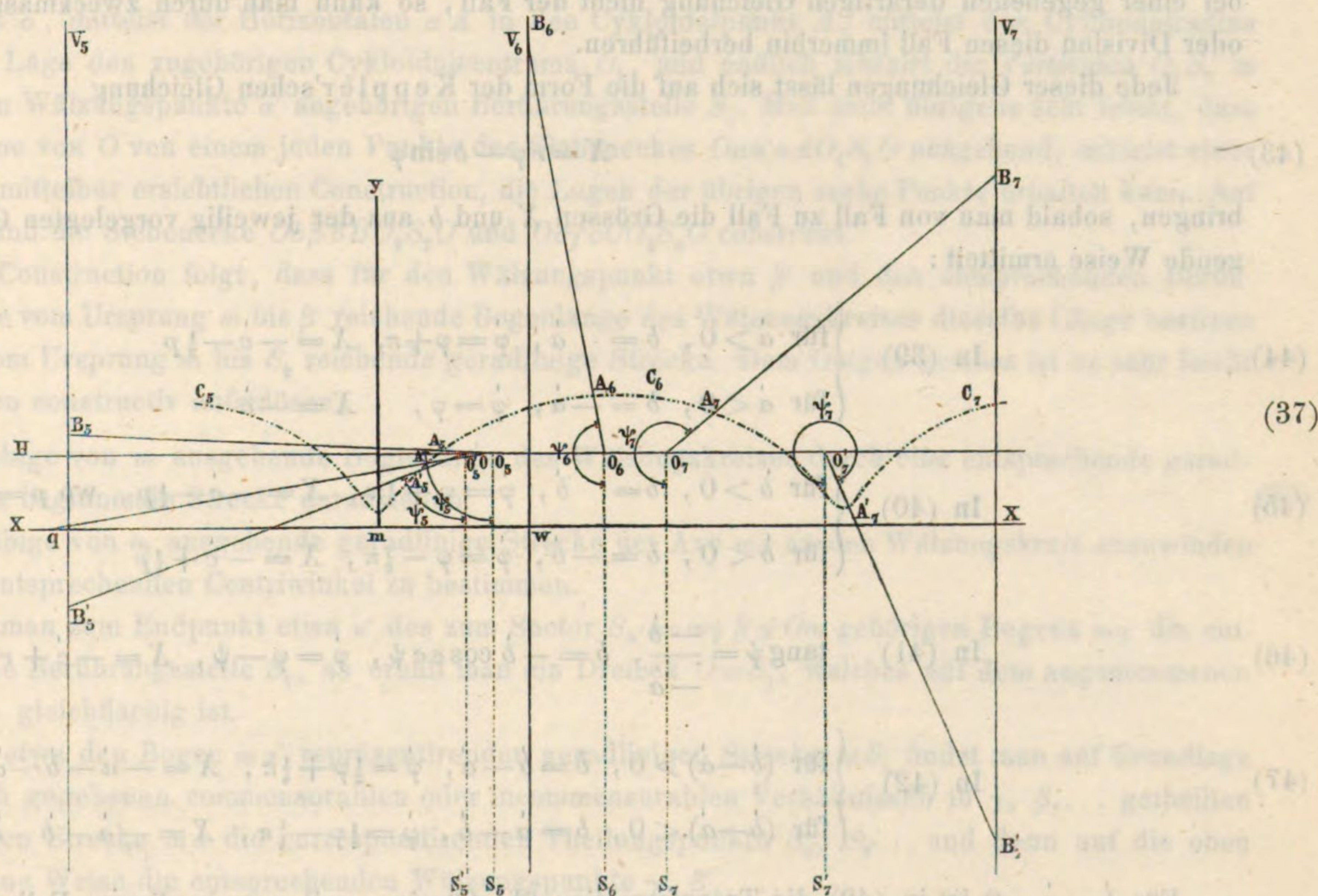
Die zur Darstellung von φ dienende Zahlenschaar (32) hängt von der jedesmaligen Wahl der Verhältnisswerthe $\frac{X}{r}$, $\frac{b}{r}$ ab, und man kann daher setzen:

$$\varphi = f\left(\frac{X}{r}, \frac{b}{r}\right). \quad (35)$$

In der nachstehenden Figur ist für die Gleichung

$$12\pi + 2 = \varphi - 5.6 \sin \varphi \quad (36)$$

die sub (28)—(33) erklärte Methode praktisch durchgeführt. Nach der am Schlusse dieses Paragraphes angegebenen Instruction erzeugt man durch Wälzung eines mit r beschriebenen Kreises mit Hilfe des Cycloi-



dalradius $OA = O_5A_5 = O'_5A'_5 = O'_6A'_6 = O_7A_7 = O'_7A'_7 = a$ die verkürzte Cycloide $A'_5A_5A_6A_7A'_7$. Wegen (36) hat man hier $X = 6p + 2r$, $5.6r = b$, und hieraus für $mw = 2r = v$ das System der Verticalen

... V_5, V_6, V_7 ... Mit Hilfe eines Papierstreifens, welcher mit den Marken O, A, B in der Art versehen ist, dass man bei jeder Bezeigerung dieser Buchstaben der Relation $OA = a, OB = b$ Genüge leistet, sind auf den Verticalen die Punkte $B_5, B'_5, B_6, B'_6, B_7, B'_7$ und auf der Axe xx' der Punkt q bestimmt, indem man nach und nach den Markenträger in die Lagen $OAg, O_5A_5B_5, O'_5A'_5B'_5, O_6A_6B_6, O'_6A'_6B'_6, O_7A_7B_7, O'_7A'_7B'_7$ gebracht hat. Wegen $x_e = qm = u$ wird keine der weiteren Verticalen ... V_2, V_3, V_4, V_8, V_9 ... getroffen. Daher sind die in (37) ersichtlichen Winkel $\psi_5, \psi'_5, \psi_6, \psi'_6, \psi_7, \psi'_7$ schon die sämtlichen Winkel, welche dem in (30) angedeuteten System angehören dürfen. Wegen $u > \frac{1}{2}p, u > v > (p-u)$ und $n=0$ erhält man nach (27) $\mathfrak{A} = 4n + 5 = 5$, also gradezu die aus der Construction hervorgehende Anzahl von Auflösungen. Da hier eigentlich von den Begegnungspunkten der V_6 mit den Cykloiden C_5, C_6, C_7 die Rede ist, so hat man nach (32) folgende vervollständigte Wälzungsbogenzahlen:

$$(38) \quad 12\pi + \psi_6, 14\pi + \psi_5, 14\pi + \psi'_5, 10\pi + \psi_7, 10\pi + \psi'_7.$$

Dies sind daher die fünf möglichen reellen Wurzeln, welche der Gleichung (36) angehören, sobald man unter den mit ψ bezeichneten ψ und ψ' die entsprechenden Bogenzahlen versteht.

In den Gleichungen:

$$(39) \quad r\dot{\varphi} + a\sin\dot{\varphi} + c = 0$$

$$(40) \quad r\dot{\varphi} + b\cos\dot{\varphi} + c = 0$$

$$(41) \quad r\dot{\varphi} + a\sin\dot{\varphi} + b\cos\dot{\varphi} + c = 0$$

$$(42) \quad 2r\dot{\varphi} + 2a\sin^2\dot{\varphi} + 2b\cos^2\dot{\varphi} + c = 0$$

haben wir den jedesmaligen ersten Coefficienten durch den Radius des Wälzungskreises dargestellt. Ist dies bei einer gegebenen derartigen Gleichung nicht der Fall, so kann man durch zweckmässige Multiplication oder Division diesen Fall immerhin herbeiführen.

Jede dieser Gleichungen lässt sich auf die Form der Kepler'schen Gleichung

$$(43) \quad X = r\varphi - b\sin\varphi$$

bringen, sobald man von Fall zu Fall die Grössen X und b aus der jeweilig vorgelegten Gleichung auf folgende Weise ermittelt:

$$(44) \quad \text{In (39)} \quad \begin{cases} \text{für } \dot{a} > 0, & b = \dot{a}, \quad \dot{\varphi} = \varphi + \pi, \quad X = -\dot{c} - \frac{1}{2}p \\ \text{für } \dot{a} < 0, & b = -\dot{a}, \quad \dot{\varphi} = \varphi, \quad X = -\dot{c} \end{cases}$$

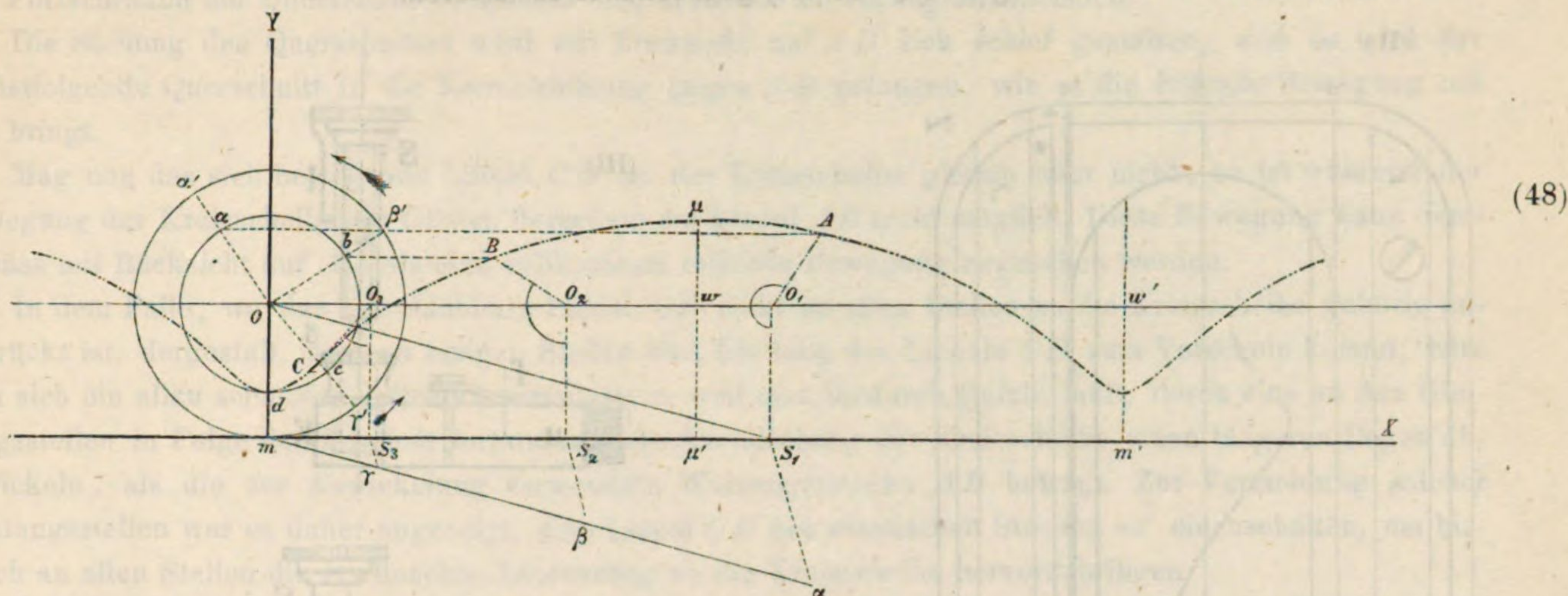
$$(45) \quad \text{In (40)} \quad \begin{cases} \text{für } \dot{b} > 0, & b = \dot{b}, \quad \dot{\varphi} = \varphi + \frac{1}{2}\pi, \quad X = -\dot{c} - \frac{1}{4}p, \quad \text{wo } p = 2r\pi \\ \text{für } \dot{b} < 0, & b = -\dot{b}, \quad \dot{\varphi} = \varphi - \frac{1}{2}\pi, \quad X = -\dot{c} + \frac{1}{4}p \end{cases}$$

$$(46) \quad \text{In (41)} \quad \tan\psi = \frac{-\dot{b}}{-\dot{a}}, \quad b = -\dot{b} \operatorname{cosec}\psi, \quad \dot{\varphi} = \varphi - \psi, \quad X = -\dot{c} + r\psi$$

$$(47) \quad \text{In (42)} \quad \begin{cases} \text{für } (\dot{b} - \dot{a}) > 0, & b = \dot{b} - \dot{a}, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\pi, \quad X = -\dot{a} - \dot{b} - \dot{c} - \frac{1}{4}p \\ \text{für } (\dot{b} - \dot{a}) < 0, & b = \dot{a} - \dot{b}, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\pi, \quad X = -\dot{a} - \dot{b} - \dot{c} + \frac{1}{4}p. \end{cases}$$

Für $\dot{b} - \dot{a} = 0$ ist in (42) die Transformation überflüssig, weil man in diesem Falle aus der Relation $r\dot{\varphi} = -\frac{\dot{c}}{2} - \dot{b}$ den Werth von $\dot{\varphi}$ unmittelbar berechnen kann.

Auf die in (37) praktisch dargelegte Weise gelangt man zu den Wurzelwerthen der Gleichung (43) und dann mittelst der gehörigen Formeln in (44), (45), (46), (47) zu eben so vielen reellen Wurzelwerthen der Gleichungen (39), (40), (41), (42).



(48)

In der vorstehenden Figur wird vorausgesetzt, dass man die zum Wälzungsradius $r = Om$ und dem Cykloidalradius $a = Od$ gehörige Cycloide $dCB\mu A$ sammt dem entsprechenden Erzeugungskreis $dcbad$ bereits genau beschrieben hat. Die Umfangspunkte des Erzeugungskreises heissen Erzeugungspunkte, die Umfangspunkte des Wälzungskreises werden Wälzungspunkte genannt. (49)

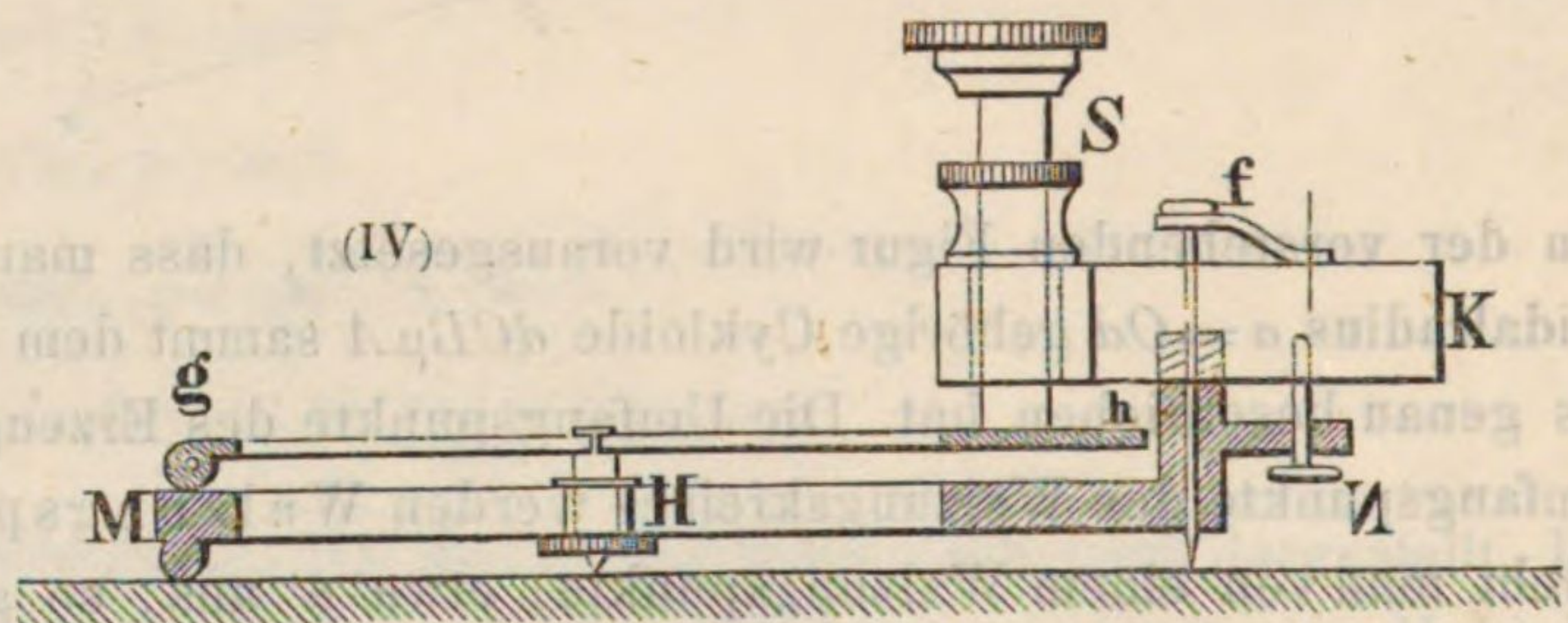
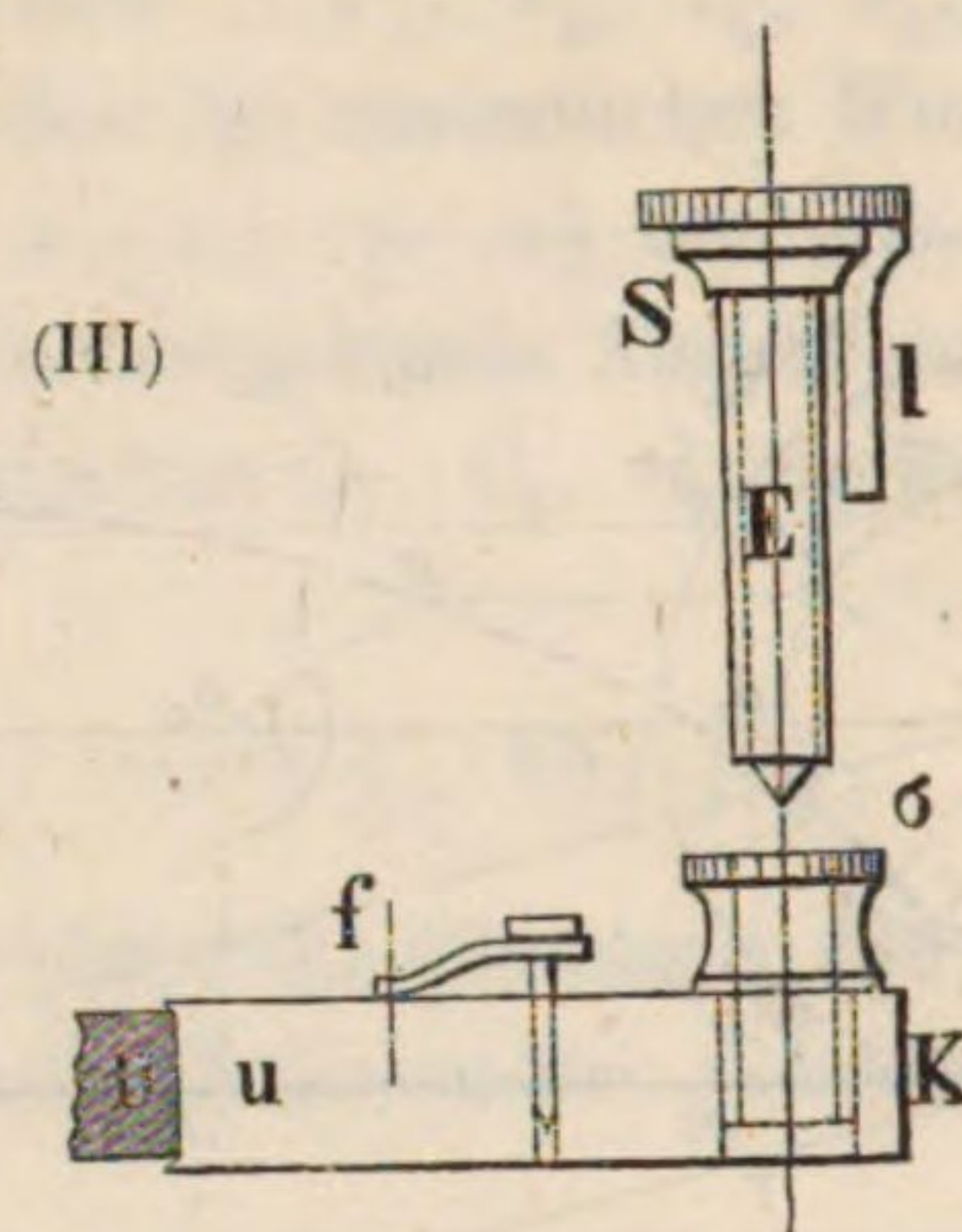
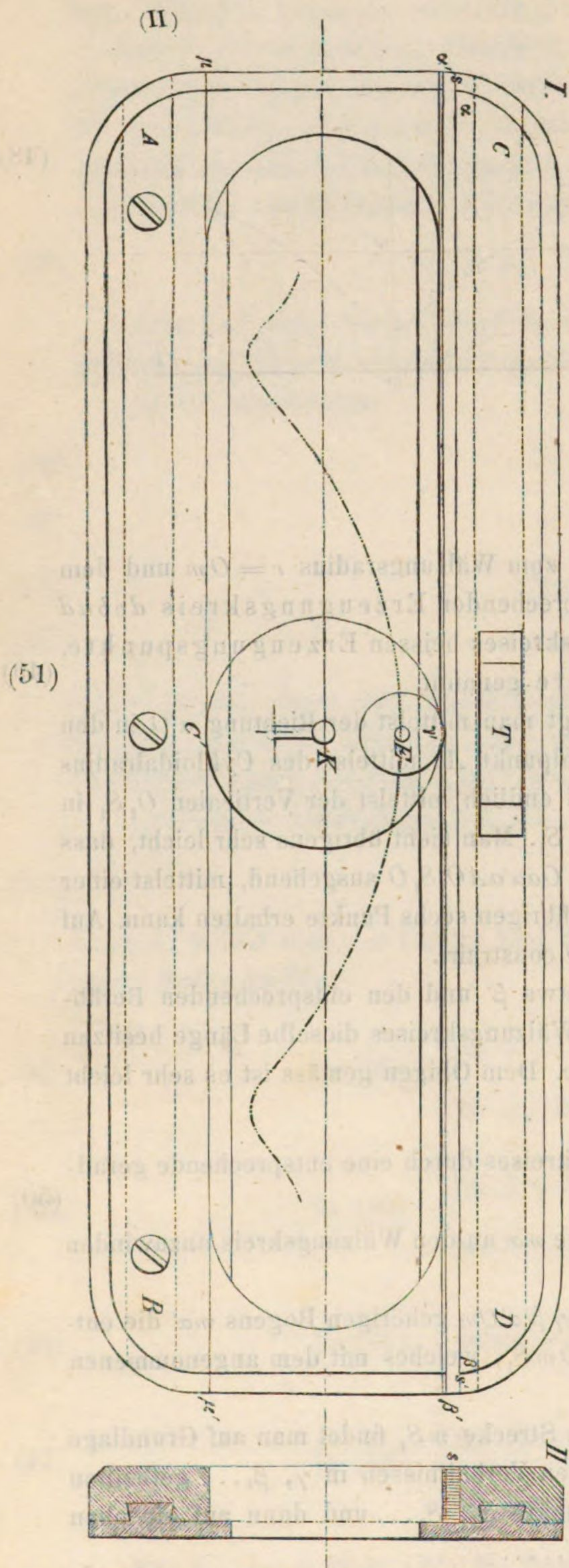
Geht man von einem Wälzungspunkte, etwa α' aus, so gelangt man mittelst der Richtung $\alpha'O$ in den Erzeugungspunkt α , mittelst der Horizontalen αA in den Cykloidalpunkt A , mittelst des Cykloidalradius $a = AO_1$ in die Lage des zugehörigen Cykloidalcentrums O_1 , und endlich mittelst der Verticalen $O_1 S_1$ in die Lage der dem Wälzungspunkte α' angehörigen Berührungsstelle S_1 . Man sieht übrigens sehr leicht, dass man mit Ausnahme von O von einem jeden Punkte des Siebeneckes $O\alpha\alpha'AO_1S_1O$ ausgehend, mittelst einer aus (48), (49) unmittelbar ersichtlichen Construction, die Lagen der übrigen sechs Punkte erhalten kann. Auf dieselbe Weise sind die Siebenecke $Ob\beta'BO_2S_2O$ und $O\gamma'cCO_3S_3O$ construiert.

Aus dieser Construction folgt, dass für den Wälzungspunkt etwa β' und den entsprechenden Berührungspunkt S_2 die vom Ursprung m bis β' reichende Bogenlänge des Wälzungskreises dieselbe Länge besitzen muss, wie die vom Ursprung m bis S_2 reichende geradlinige Strecke. Dem Obigen gemäss ist es sehr leicht folgende Aufgaben constructiv aufzulösen :

1. Eine beliebige von m ausgehende Bogenlänge des Wälzungskreises durch eine entsprechende geradlinige in m beginnende Strecke darzustellen. (50)
2. Eine beliebige von m ausgehende geradlinige Strecke der Axe mx an den Wälzungskreis anzuwinden und den entsprechenden Centriwinkel zu bestimmen.
3. Bestimmt man zum Endpunkt etwa α' des zum Sector $S_{\alpha'} = m\gamma'\beta'\alpha'Om$ gehörigen Bogens $m\alpha'$ die entsprechende Berührungsstelle S_1 , so erhält man ein Dreieck OmS_1 , welches mit dem angenommenen Sector $S_{\alpha'}$ gleichflächig ist.
4. Auf einer etwa den Bogen $\widehat{m\alpha'}$ repräsentirenden geradlinigen Strecke mS_1 findet man auf Grundlage einer nach gegebenen commensurablen oder incommensurablen Verhältnissen in $\gamma, \beta, \dots$ getheilten geradlinigen Strecke $m\alpha$ die correspondirenden Theilungspunkte $S_3, S_2, \dots$ und dann auf die oben besprochene Weise die entsprechenden Wälzungspunkte $\gamma', \beta', \dots$.

Diesen Bemerkungen zufolge werden nun mit Hilfe einer principiell richtig verzeichneten Cycloide folgende Probleme einer directen Lösung angeführt :

1. Das Problem der Rectification gegebener Kreisbögen.
2. Das Problem der Theilung gegebener Kreisbögen und der entsprechenden Centriwinkel in beliebig viele Theile nach commensurablen oder incommensurablen Verhältnissen.
3. Das Problem der Flächenangabe (Quadratur) gegebener Kreissectoren.



Die graphische Lösung der im Verlaufe dieses Paragraphes discutirten Probleme wird durch eine principiell richtige verkürzte Normaleycloide vermittelt, welche mit der nachstehend beschriebenen Vorrichtung verzeichnet werden kann.

Auf die Zeichnungsfläche wird ein rechteckiger Rahmen $ABCD$ angelegt, auf welchem mittelst der Handhabe T ein Lineal CD parallel zu AB hin und her sich verschieben lässt. Das Lineal CD ist aus zwei Theilen $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ zusammengesetzt, welche mittelst einer elastischen Schichte ss' mit einander zusammenhängen. Innerhalb des Rahmens befindet sich eine das Lineal $\alpha'\beta'$ in γ' , und das Lineal AB in C' berührende Kreisscheibe K , welche während der Verschiebung des Lineals CD eine rollende Bewegung annehmen muss. Die verticalen Berührungskanten γ' und C' bilden die Seiten eines durch das Centrum der Kreisscheibe gehenden Querschnittes, welcher auf beiden Linealen gleichzeitig senkrecht steht. Zur Sicherung der Scheibe K vor dem Herausfallen aus dem Rahmen, dienen entweder zwei am unteren Rahmen vorspringende dünne Leisten, oder eine derartige Aushöhlung des Radumfanges, wie dies in III im Querschnitt u ersichtlich ist.

Ist das Lineal CD nicht gehörig an die Kreisscheibe angepresst, so kann es sich ereignen, dass während der Verschiebung von CD die Kreisscheibe und auch die Kante C' in Ruhe verbleibt.

Ist aber CD an die Kreisscheibe gehörig angedrückt, so ist dies auch beim Lineal AB der Fall. Wenn nun die Verschiebung von CD eine Bewegung der Kante γ' veranlasst, so wird die eben so starke Pressung von AB an die Kreisscheibe der Bewegung der Kante C' hemmend in den Weg treten, und es wird bei diesem Fortschreiten der Querschnitt veranlasst eine drehende Bewegung anzunehmen.

Die Stellung des Querschnittes wird mit Rücksicht auf AB sich schief gestalten, und es wird der nächstfolgende Querschnitt in die Normalrichtung gegen AB gelangen, wie es die rollende Bewegung mit sich bringt.

Mag nun das sich bewegende Lineal CD an der Kreisscheibe gleiten oder nicht, so ist während der Bewegung der Kreisscheibe ein Gleiten derselben am Lineal AB nicht möglich. Diese Bewegung kann demgemäss mit Rücksicht auf AB als eine vollkommen rollende Bewegung angesehen werden.

In dem Falle, wo das verschiebbare Lineal CD nicht an allen Stellen an die Kreisscheibe gehörig angedrückt ist, dergestalt, dass an einigen Stellen eine Gleitung des Lineals CD zum Vorschein kommt, hüte man sich ein allzu schnelles Rollen zu veranlassen, weil man hiedurch Gefahr läuft, durch eine an den Gleitungsstellen in Folge der Trägheit fortandauernde Axendrehung der Kreisscheibe einen längeren Bogen abzuwickeln, als die zur Abwicklung verwendete Wälzungsstrecke AB beträgt. Zur Vermeidung solcher Gleitungsstellen war es daher angezeigt, dem Lineal CD den elastischen Streifen ss' einzuschalten, um hiedurch an allen Stellen die erwünschte Anpressung an die Kreisscheibe hervorzubringen.

Bei der auf diese Weise gesicherten vollkommen rollenden Bewegung der Kreisscheibe beschreibt jeder mit der Kreisscheibe in Verbindung stehende Punkt, wie etwa die Spitze eines in die Öffnung E eingetauchten, mittelst eines Gewichtes vertical gedrückten Bleistiftes auf der Zeichnungsfläche eine Cykloide, und zwar in diesem Falle eine verkürzte Cykloide, welche — wie bereits genügend gezeigt wurde — im Constructionswesen mit erheblichen Vortheilen verwendet werden kann. Das im Einschnitt σ eingreifende Züngelchen l hindert die drehende Bewegung des Schreibstiftes, und bewirkt hiedurch die Fixirung des letzteren mit der rollenden Kreisscheibe. Durch Herabdrückung der an der Feder f schwebenden feinen Nadel erhält man auf der Zeichnungsfläche Spuren, welche die Lage der Centrallinie markiren. Die verticalen Marken in μ und μ' dienen zur Angabe der Geraden, auf welcher die Kreisscheibe fortgewälzt wird.

Bringt man mit der Kreisscheibe nach der Andeutung von (IV) eine Schreibvorrichtung MN in feste Verbindung, so wird man in den Stand gesetzt, Cyklöiden mit beliebig langen Cyklöidalradien zu beschreiben, sobald man den oben beschriebenen Rahmen $ABCD$ auf vier oder mehre mit breiten Basen versehene Füßchen aufrufen lässt, indem durch successives Wegschieben und Wiedereinsetzen solcher Füßchen der Bewegung der Schreibvorrichtung der nöthige Raum frei gemacht wird.

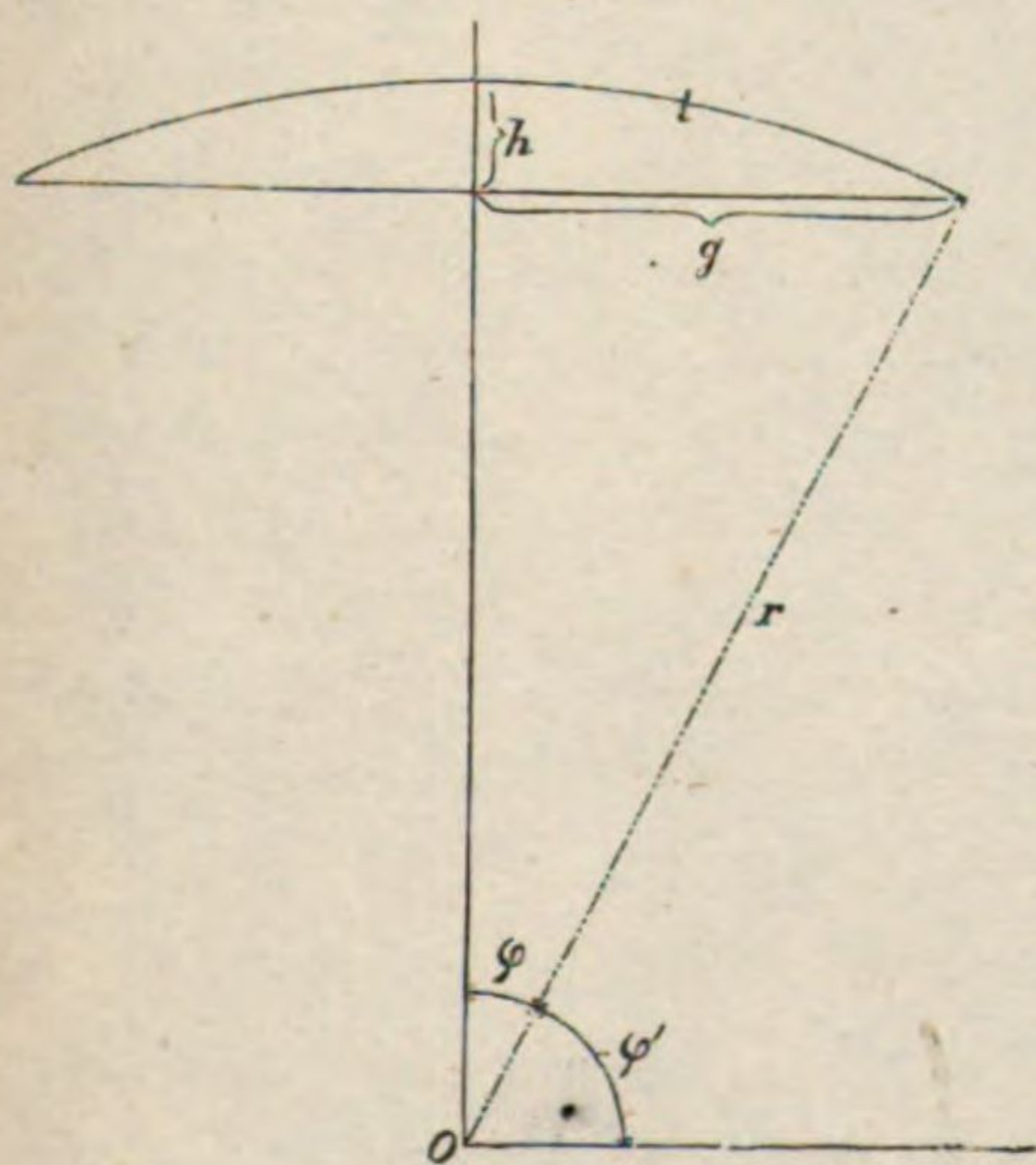
Die Schreibvorrichtung besteht aus einem festen Arm MN , längs dessen Längenschlitz sich ein kurzer Cylinder H verschieben und an beliebiger Stelle durch ein Pressscheibchen fixiren lässt, — und aus einem

darüber befindlichen Stahlplättchen gh , längs welchem eine in H verschiebbare Schreibstiftöhse frei beweglich ist. Die sub (III) erwähnte Schreibstiftöhse S dient hier bloss zum Niederdrücken der Stahlplatte gh , um hiedurch den zeichnenden Stift auf die Zeichnungsfläche wirken zu lassen.

Zur Bestimmung des Radius r eines Kreises, auf welchen eine Länge $2l$ angewunden einen Bogen liefert, dessen Pfeilhöhe eine gegebene Länge h beträgt, hat man die Relationen:

$$X = \frac{l}{h} = \frac{\pi}{2} = \varphi' - \frac{l}{h} \sin \varphi', \quad r = \frac{l}{\varphi' + \frac{\pi}{2}}. \quad (52)$$

Eben so hat man zur Bestimmung des Radius $= r$ eines Kreises, auf welchen eine bestimmte Länge $= 2l$ angewunden einen Bogen über einer gegebenen Sehnenlänge $= 2g$ liefert, folgende Gleichungen:

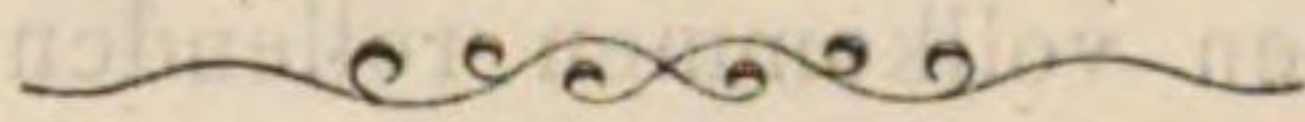


(53)

$$X = 0 = \varphi - \frac{l}{g} \sin \varphi, \quad r = \frac{l}{\varphi}.$$

Die nach (32) mittelst Construction bestimmten Werthe der Verhältnisszahlen φ' und φ sind in principieller Beziehung vollkommen richtig. Wenn man aber die ausserhalb der Theorie liegenden Umstände, als die Mangelhaftigkeit der Instrumente, die unrichtige Ablesung der Messungsergebnisse in Erwägung zieht, — so wird man der Genauigkeit der durch Construction erhaltenen Bogenzahlen kein allzu grosses Gewicht zuerkennen; — man wird vielmehr diese Werthe bloss in der Eigenschaft von Initialwerthen der zu bestimmenden Wurzeln adoptiren.

Auf Grund dieser Initialwerthe lassen sich sehr leicht aus den betreffenden Gleichungen Näherungsformeln ableiten, durch deren successive Anwendung die Bogenzahlen φ' und φ mit jeder erwünschten Genauigkeit sich berechnen lassen.



Žmurko, Lorenz

Studien im Gebiete numerischer Gleichungen mit Zugrundelegung der analytisch-geometrischen Anschauung im Raume Constructionsmittel der Geometrie. Vorgelegt in der Sitzung am 18. Febr. 1869. (Besonders abgedruckt aus dem XXX. Bande der Denkschriften der mathem.-naturw. Cl.

Wien 1870

4 Math.p. 397 o

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10989812-2